CZĘŚĆ PIERWSZA

ALGEBRA OPERATORÓW

ROZDZIAŁ I

Pojęcie i własności splotu funkcyj ciągłych

§ 1. Definicja splotu

Wyjściowym punktem dla teorii przedstawionej w tej książce jest pojęcie *splotu*[1]). Splotem funkcyj $a(t)$ i $b(t)$ nazywamy funkcję $c(t)$ określoną przez całkę

$$c(t)=\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau.$$

P r z y k ł a d y.

1. $$a(t)=t^2,\quad b(t)=e^t;$$

$$\begin{aligned}c(t)&=\int_0^t (t-\tau)^2 e^\tau d\tau=\int_0^t (t^2-2t\tau+\tau^2)\,e^t\,d\tau=\\ &=t^2\int_0^t e^\tau\,d\tau-2t\int_0^t \tau e^\tau d\tau+\int_0^t \tau^2 e^\tau d\tau=\\ &=t^2(e^t-1)-2t(te^t-e^t+1)+(t^2e^t-2te^t+2e^t-2)=\\ &=2e^t-t^2-2t-2.\end{aligned}$$

2. $$a(t)=b(t)=\sin t;$$

$$\begin{aligned}c(t)&=\int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\\ &=\int_0^t [\sin t\cos\tau-\cos t\sin\tau]\sin\tau\,d\tau=\\ &=\sin t\int_0^t \cos\tau\sin\tau\,d\tau-\cos t\int_0^t \sin^2\tau\,d\tau=\\ &=\sin t\cdot\tfrac{1}{2}\sin^2 t-\cos t\,(\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}\sin t\cos t)=\tfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t).\end{aligned}$$

---

[1]) W językach obcych splot nosi nazwy *свёртка* (po rosyjsku), *produit de composition* (po francusku), *Faltung* (po niemiecku) i *convolution* lub *resultant* (po angielsku).

Ćwiczenia. Obliczyć sploty następujących par funkcyj:

1. $a(t)=1-\alpha t$, $b(t)=e^{\alpha t}$;
2. $a(t)=e^{\alpha t}$, $b(t)=1-\alpha t$;
3. $a(t)=1$, $b(t)=\sqrt{1+t}$;
4. $a(t)=\sqrt{1+t}$, $b(t)=1$;
5. $a(t)=\operatorname{sh} t$ [1]), $b(t)=\sin t$;
6. $a(t)=\sin t$, $b(t)=\operatorname{sh} t$.

§ 2. Klasa $\mathcal{C}$

Funkcje, które są określone i ciągłe w przedziale $0\leqslant t<\infty$ będą grały szczególnie ważną rolę w rachunku operatorów; klasę tych funkcyj oznaczymy literą $\mathcal{C}$. Funkcje klasy $\mathcal{C}$ mogą mieć wartości rzeczywiste lub zespolone.

Funkcje rozważane w poprzednim paragrafie należą wszystkie do klasy $\mathcal{C}$; mają one wartości rzeczywiste. Przykładem funkcji klasy $\mathcal{C}$ o wartościach zespolonych (nie rzeczywistych) jest funkcja e^{it}. Funkcja $1/t$ nie należy do klasy $\mathcal{C}$, ponieważ jest nieciągła w punkcie $t=0$.

Jeżeli $a(t)$ i $b(t)$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}$, to splot ich również należy do klasy $\mathcal{C}$, ponieważ jest funkcją określnoą i ciągłą w przedziale $0\leqslant t<\infty$.

W rozdziale 1 będziemy rozważać jedynie funkcje klasy $\mathcal{C}$; założenia tego nie będziemy za każdym razem powtarzać.

Ćwiczenie. Wskazać, które z podanych funkcyj należą, a które nie należą do klasy $\mathcal{C}$:

$$\frac{1}{t+1},\ \frac{1}{t-1},\ \frac{1}{t-i},\ \frac{1}{e^t+e^{-t}},\ \frac{1}{e^t-e^{-t}},\ \frac{1}{\cos t},\ \frac{1}{1+\cos t},\ \frac{1}{2+\cos t},\ \frac{1}{i+\cos t}.$$

§ 3. Przemienność splotu

Porównanie wyników ćwiczeń z paragrafu 1 wskazuje, że *wartość splotu nie zależy od kolejności występujących w nim funkcyj*. Jest to twierdzenie prawdziwe dla zupełnie dowolnych par funkcyj $a(t)$ i $b(t)$. Aby je udowodnić ogólnie, należy wykazać prawdziwość wzoru

$$\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau=\int_0^t b(t-\tau)\,a(\tau)\,d\tau. \tag{3.1}$$

[1]) $\operatorname{sh} t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ (funkcja *sinus hiperbolicus*).

Wykonując w pierwszej z całek podstawienie $t-\tau=\sigma$, otrzymujemy

$$-\int_t^0 a(\sigma)\,b(t-\sigma)\,d\sigma=\int_0^t b(t-\sigma)\,a(\sigma)\,d\sigma,$$

a stąd już wynika równość (3.1).

Udowodniona własność nosi nazwę *przemienności* splotu. Jest ona analogiczna do przemienności mnożenia liczb w arytmetyce, gdzie zachodzi zawsze równość $ab=ba$ dla dowolnych par liczb a i b.

§ 4. Łączność splotu

Splot ma również własność analogiczną do łączności mnożenia liczb:

$$(ab)c=a(bc).$$

Własność tę można dla liczb wyrazić zdaniem:

Jeżeli $ab=g$ *i* $bc=h$, *to* $gc=ah$.

W podobnej też formie najwygodniej jest wypowiedzieć twierdzenie o *łączności* splotu:

Jeżeli $\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau=g(t)$ *i* $\int_0^t b(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau=h(t)$, *to zawsze jest* $\int_0^t g(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau=\int_0^t a(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$.

Dowód. Napiszmy

$$\int_0^t g(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau=\int_0^t\left[\int a(t-\tau-\sigma)\,b(\sigma)\,d\sigma\right]c(\tau)\,d\tau.$$

Podstawiając $\sigma=\omega-\tau$, mamy

$$\int_0^t g(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau=\int_0^t\left[\int_\tau^t a(t-\omega)\,b(\omega-\tau)\,d\omega\right]c(\tau)\,d\tau=$$
$$=\iint_T a(t-\omega)\,b(\omega-\tau)\,c(\tau)\,d\omega\,d\tau,$$

gdzie całka podwójna jest rozciągnięta na obszar trójkątny T, określony nierównościami $0\leqslant\tau\leqslant\omega\leqslant t$. Zamieniając całkę podwójną z powrotem na iterowaną, lecz ze zmienioną kolejnością całkowania,

otrzymujemy

$$\int_0^t g(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau=\int_0^t a(t-\omega)\Big[\int_0^\omega b(\omega-\tau)\,c(\tau)\,d\tau\Big]d\omega=$$
$$=\int_0^t a(t-\omega)\,h(\omega)\,d\omega.$$

Łączność splotu jest więc udowodniona.

§ 5. Dodawanie i splot jako podstawowe działania w rachunku operatorów

W arytmetyce, dzięki łączności mnożenia, iloczyn trzech liczb a, b i c możemy zapisywać w postaci abc; jest bowiem obojętne, czy ktoś obliczy ten iloczyn według schematu $(ab)c$, czy też $a(bc)$. Podobnie przy obliczaniu splotu trzech funkcyj $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$ obojętne jest, w jaki sposób je połączymy. Widać jednak, że zapisanie splotu trzech funkcyj w sposób analogiczny do iloczynu abc, to znaczy nie uwzględniający kolejności ich łączenia, jest przy użyciu symboli rachunku całkowego niewygodne.

Daleko idące uproszczenie zyskamy, umawiając się, że splot dwóch funkcyj $a(t)$ i $b(t)$ będziemy po prostu oznaczać tak, jak iloczyn dwóch liczb, to znaczy symbolem ab lub $a\cdot b$. Przy tej umowie splot trzech funkcyj $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$ konsekwentnie zapisywać będziemy w postaci abc. Podobnie można zapisywać splot więcej niż trzech funkcyj.

Ponieważ splot ma takie same własności (łączność i przemienność) jak iloczyn w arytmetyce, formalne rachunki będą również takie same. Fakt ten będzie grał podstawową rolę w rachunku operatorów. Jak w arytmetyce zasadniczymi działaniami są dodawanie i mnożenie, tak w rachunku operatorów są nimi *dodawanie* i *splot*.

Elementami, na których wykonujemy działania w arytmetyce, są liczby, natomiast w rachunku operatorów są nimi funkcje klasy $\mathcal{C}$ [1]).

Przy zapisywaniu splotu jak zwykłego iloczynu narażamy się oczywiście na pewną dwuznaczność. Na przykład równości

$$ab=ba \quad \text{i} \quad (ab)c=a(bc)$$

[1]) Później wprowadzimy do rachunku również funkcje nieciągłe (§ 51) oraz elementy, zwane *operatorami* (§ 15).

będą miały inne znaczenie w klasycznej algebrze, a inne w rachunku operatorów. Dwuznaczność ta będzie jednak zupełnie nieszkodliwa, znaczenie bowiem powyższych równości zależne będzie od tego, co podstawiamy za litery a, b i c. Podstawiając liczby, będziemy mieli do czynienia ze zwykłym iloczynem, podstawiając zaś funkcje, będziemy mieli do czynienia ze splotem.

Oprócz przemienności i łączności splot ma jeszcze trzecią podstawową własność iloczynu, mianowicie *rozdzielność względem dodawania:*

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Istotnie, mamy

$$\int_0^t a(t-\tau)[b(\tau)+c(\tau)]\,d\tau=\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau+\int_0^t a(t-\tau)\,c(\tau)\,d\tau.$$

Tak samo można udowodnić prawo rozdzielności splotu względem odejmowania: $a(b-c)=ab-ac$.

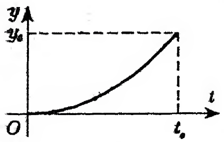
Używanie w rachunku operatorowym znakowania takiego jak w zwykłej algebrze jest ogromnym ułatwieniem, pozwala bowiem wykorzystać nabyte przyzwyczajenia i skomplikowane nieraz przekształcenia całek zastąpić przez mechaniczne niemal rachunki.

§ 6. Funkcja a wartość funkcji

Pewne niebezpieczeństwo nieporozumienia zjawia się wówczas, gdy chcemy skróconym sposobem zapisać splot dwóch funkcyj stałych, z których pierwsza ma na przykład wartość 2, druga zaś 3. Wtenczas symbol $2\cdot 3$ oznaczałby w arytmetyce liczbę 6, a w rachunku operatorów funkcję $\int_0^t 2\cdot 3\,d\tau=6t$. Trudność wynika stąd, że na ogół nie odróżnia się wyraźnie pojęcia funkcji stałej od pojęcia liczby, używając dla obydwu tych samych symboli. Nie będziemy tutaj wchodzić w precyzyjne definicje logiczne, natomiast zilustrujemy różnicę geometrycznie. Jak wiadomo, do geometrycznego przedstawiania liczb rzeczywistych używa się tak zwanej *osi liczbowej*. Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada pewien punkt na osi i odwrotnie: każdemu punktowi na osi odpowiada pewna liczba rzeczywista.

O ile do przedstawienia liczb wystarcza jedna prosta, to do przedstawiania *funkcyj* (o wartościach rzeczywistych) potrzebna

jest *płaszczyzna*. Rysunek 1 wyobraża wykres funkcji $\frac{1}{6}t^2$. Funkcja jest przedstawiona nie przez jeden punkt, lecz przez nieskończenie wiele punktów, które tworzą parabolę. Mając dany na osi t jakiś punkt t_0 możemy znaleźć za pomocą konstrukcji podanej na rysunku pewien punkt y_0 leżący na osi y. Liczbę odpowiadającą punktowi y_0 nazywamy *wartością funkcji* w punkcie t_0.



Rys. 1.

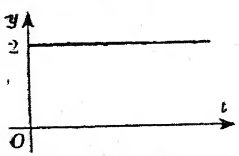
Widać z tego przykładu, że co innego znaczy *funkcja* $f(t)$, co innego zaś *wartość funkcji w punkcie* t. Jeżeli funkcja przyjmuje wartości zespolone, to dla geometrycznego jej przedstawienia nie wystarcza już płaszczyzna. Jest jednak jasne, że i w tym przypadku pojęcia funkcji i wartości funkcji są różne. W matematyce klasycznej nie było potrzeby wprowadzania dla tych pojęć różnych oznaczeń. Natomiast w niektórych nowoczesnych działach matematyki, na przykład w analizie funkcyjnej i w szczególności w rachunku operatorów rozróżnienie to staje się konieczne.

Umawiamy się odtąd, że symbol $f(t)$, *nie poprzedzony wyrazem funkcja*, będzie zawsze oznaczał wartość funkcji w punkcie t; samą zaś funkcję będziemy dla odróżnienia oznaczać symbolem $\{f(t)\}$ [1].

Umowę tę możemy schematycznie zapisać w postaci równości:

$$\text{funkcja } f(t) = \{f(t)\},$$
$$\text{wartość funkcji } f(t) \text{ w punkcie } t = f(t).$$

W szczególności więc symbol $\{2\}$ będzie oznaczał funkcję stałą, której wartość wynosi 2 w każdym punkcie t. Sama zaś dwójka: 2 będzie oznaczała liczbę. Geometrycznie funkcja $\{2\}$ przedstawia linię prostą równoległą do osi t, podczas gdy liczba 2 jest przedstawiona przez jeden punkt na ustalonej osi liczbowej. Zauważmy jeszcze, że wartość funkcji $\{2\}$ wynosi 2 dla każdego punktu t i jest przedstawiona na rysunku 2 przez punkt oznaczony cyfrą 2 na osi y.



Rys. 2.

Wobec przyjętej umowy znaczenie symbolu $2 \cdot 3$ nie jest już dwuznaczne; jest to zwykły iloczyn liczb 2 i 3, który jest równy

[1]) Dla odróżnienia funkcji od jej wartości niektórzy autorowie używają dla funkcji symbolu $f(\hat{t})$, inni $f(:)$ lub $f(\cdot)$. Znakowania te nie dadzą się jednak wszędzie przeprowadzić konsekwentnie, trudno na przykład byłoby w ten sposób odróżnić funkcję mającą wszędzie wartość 1953 od samej liczby 1953.

liczbie 6. Natomiast symbol $\{2\}\{3\}$ oznacza splot *funkcji* 2 z *funkcją* 3, to znaczy *funkcję* $6t$. Mamy więc równości

$$2 \cdot 3 = 6 \quad \text{i} \quad \{2\}\{3\} = \{6t\}.$$

Ćwiczenie. Używając symboliki wprowadzonej w tym paragrafie, sprawdzić wzory:

(α) $\{1\}\{e^t\} = \{e^t - 1\}$;

(β) $\{1\}\{\cos t\} = \{\sin t\}$;

(γ) $\{1\}\{1\} = \{t\}$;

(δ) $\{t^2\}\{t^3\} = \{\frac{1}{60}t^6\}$.

§ 7. Symbolika

Mamy ogólne wzory

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$
$$\{a(t)\} \cdot \{b(t)\} = \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Pierwszy z nich oznacza, że dodawanie funkcyj jest po prostu dodawaniem ich wartości; drugi jest konsekwencją umowy przyjętej w poprzednim paragrafie.

Stałe zapisywanie funkcyj w postaci $\{f(t)\}$ może być czasem uciążliwe. Jeżeli jakaś funkcja występuje w rachunku kilka razy, to najwygodniej oznaczyć ją jedną literą, na przykład:

$$a = \{e^{t^2} \cos t\}, \qquad b = \left\{t^3 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right\} \qquad \text{itp.}$$

Jeżeli funkcja nie jest dana konkretnie, lecz zapisana symbolem ogólnym $\{f(t)\}$, to w skrócie najlepiej używać tej samej litery

$$f = \{f(t)\}.$$

Wygodnie jest również wprowadzić znakowanie:

$$a^2 = a \cdot a,$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a,$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \qquad \text{itd.}$$

Jeżeli m i n są liczbami naturalnymi, to mamy ogólne wzory

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad a^n b^n = (ab)^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn};$$

wzorów tych dowodzi się jak w zwykłej algebrze.

Ćwiczenia. 1. Sprawdzić równości:

(α) $\{t\}^2=\{\frac{1}{6}t^3\}$, (β) $\{t\}^3=\{\frac{1}{120}t^5\}$, (γ) $\{e^t\}^2=\{te^t\}$,

(δ) $\{e^t\}^3=\{\frac{1}{2}t^2e^t\}$, (ε) $\{2\}^3=\{4t^2\}$, (η) $\{2\}^5=\{\frac{4}{3}t^4\}$.

2. Korzystając z praw przemienności, łączności i rozdzielności, uprościć wyrażenia:

(α) $\{\cos^2 t\}\{t\}+\{t\}\{\sin^2 t\}$,

(β) $\{1-\sqrt{t}\}\{\sin t\}+\{1+\sqrt{t}\}\{\cos t\}+\{1-\sqrt{t}\}\{\cos t\}+\{1+\sqrt{t}\}\{\sin t\}$.

§ 8. Operator całkowy

Zgodnie z definicją splotu jest

$$\{1\}\{f(t)\}=\Big\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big\};$$

funkcja $\{1\}$ wyróżnia się tym, że utworzenie jej splotu z dowolną funkcją $\{f(t)\}$ powoduje scałkowanie tej ostatniej w granicach od 0 do t. Z tego powodu funkcję $\{1\}$ będziemy nazywać *operatorem całkowym*; dla skrócenia będziemy ją oznaczać literą l:

$$l=\{1\}.$$

Łatwo obliczyć kolejne potęgi operatora całkowego:

$$l^2=\Big\{\frac{t}{1}\Big\},\qquad l^3=\Big\{\frac{t^2}{1\cdot 2}\Big\},\qquad l^4=\Big\{\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Big\}\qquad \text{itd.}$$

Używając oznaczenia

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$$

można napisać wzór ogólny

$$l^n=\Big\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big\}.$$

Wzór ten jest prawdziwy dla każdej naturalnej liczby $n\geqslant 2$. Jeżeli przyjmiemy, że $0!=1$, to prawdziwość wzoru zachowuje się również dla $n=1$.

Wyrażenie $l^n\{f(t)\}$ można na podstawie łączności splotu interpretować na dwa sposoby: 1^0 jako funkcję powstałą przez n-krotne scałkowanie funkcji $\{f(t)\}$ w granicach od 0 do t lub 2^0 jako splot

funkcyj $\Big\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big\}$ i $\{f(t)\}$. Stąd wzór

$$\underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n} f(t)\,dt=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,d\tau,$$

znany pod nazwą *wzoru Cauchy'ego*.

Ćwiczenia. 1. Obliczyć wyrażenia:

(α) $l^2\{n\sin nt\}$, (β) $l^2\{ne^{-nt}\}$, (γ) $l^3\{n^2te^{-nt}\}$.

2. Udowodnić wzór

$$l^3\{n^2\cos nt\}=l^2-\Big\{\frac{1}{n}\sin nt\Big\}.$$

ROZDZIAŁ II

Twierdzenie Titchmarsha

§ 9. Sformułowanie twierdzenia i ogólne uwagi

W paragrafach 3, 4 i 5 udowodniliśmy przemienność, łączność i rozdzielność splotu względem dodawania. Znacznie głębszą własność splotu wyraża następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcje f i g klasy $\mathcal{C}$ (zob. § 2, str. 2) *nie są tożsamościowo równe zeru, to ich splot również nie jest tożsamościowo równy zeru.*

Twierdzenie to zostało wypowiedziane i udowodnione przez E. Titchmarsha[1]) w roku 1924. Dowód polegał na badaniu rozmieszczenia zer pewnych funkcyj analitycznych. Prostsze dowody, polegające na badaniu szybkości wzrostu funkcyj analitycznych lub harmonicznych podali M. Crum[2]) w roku 1941 i J. Dufresnoy[3]) w latach 1947 i 1948. Dowód oparty wyłącznie na metodach funkcyj zmiennej rzeczywistej podał C. Ryll-Nardzewski[4]) w roku 1952. Ten ostatni dowód podamy w tym rozdziale. Przedtem udowodnimy kilka twierdzeń przygotowawczych. Twierdzenia te wypowiemy dla funkcyj ciągłych[5]).

Kogo interesują tylko zastosowania rachunku operatorów, może zupełnie bez szkody dla zrozumienia dalszego wykładu pominąć czytanie tego rozdziału i kontynuować lekturę od rozdziału 3.

---

[1]) Titchmarsh [45] i [46].
[2]) Crum [6].
[3]) Dufresnoy [13] i [14].
[4]) Dowód Nardzewskiego nie był jeszcze nigdzie opublikowany.
[5]) Twierdzenia te, jak również twierdzenie Titchmarsha, łatwo jest uogólnić na dowolne funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a. Uogólnienia te nie są potrzebne dla rachunku operatorów.

§ 10. Twierdzenie Phragména

W roku 1904 E. Phragmén[1]) udowodnił następujące twierdzenie:

Jeżeli g jest funkcją ciągłą w przedziale $[0,T]$, *to*

$$(10.1)\qquad \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

dla każdego t, spełniającego nierówności $0\leqslant t<T$.

O ile założymy, że znaki

$$(10.2)\qquad \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\quad \text{i}\quad \int_0^T$$

można z sobą przestawiać, to dowód można przeprowadzić bardzo łatwo, pisząc lewą stronę wzoru (10.1) w postaci

$$\int_0^T g(\tau)\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kx(t-\tau)}\,d\tau$$

czyli

$$(10.3)\qquad \int_0^T g(\tau)\lim_{x\to\infty}(1-\exp[-e^{x(x-\tau)}])\,d\tau.$$

Widać, że

$$\lim_{x\to\infty}\exp(-e^{x(t-\tau)})=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad \tau<t,\\ 1 & \text{dla}\quad t<\tau.\end{cases}$$

Wobec tego funkcja pod całką (10.3) jest równa $g(\tau)$ w przedziale $0<\tau<t$, równa zaś 0 w przedziale $t<\tau<T$. Zatem całka (10.3) redukuje się po prostu do całki $\int_0^t g(\tau)\,d\tau$, co należało udowodnić.

Przestawialność znaków (10.2) można uzasadnić dla lewej strony wzoru (10.1), opierając się na pewnych twierdzeniach o całkowaniu ciągów funkcyjnych.

Chcąc mieć dowód zupełnie elementarny, a jednocześnie ścisły, można go przeprowadzić w następujący rachunkowy sposób.

Ustalmy dowolnie t w przedziale $0\leqslant t<T$. Wówczas dla każdego naturalnego n i dodatniego x można napisać

$$(10.4)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau=I_n(x)+K_n(x),$$

---

[1]) Phragmén [39].

gdzie

(10.5) $$I_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^t e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau \quad \text{i} \quad K_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_t^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau.$$

Przestawiając w pierwszym z wzorów (10.5) kolejność sumowania i całkowania (co w przypadku sumy skończonej jest zawsze dozwolone), łatwo dochodzimy do równości

$$I_n(x)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau-\int_0^t g(\tau)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}e^{kx(t-\tau)}\,d\tau=$$
$$=\int_0^t g(\tau)\,d\tau-\int_0^t g(\tau)\Big(\exp[-e^{x(t-\tau)}]-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}e^{kx(t-\tau)}\Big),$$

czyli

(10.6) $$I_n(x)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau+J(x)+L_n(x),$$

gdzie

$$J(x)=-\int_0^t g(\tau)\exp[-e^{x(t-\tau)}]\,d\tau \quad \text{i} \quad L_n(x)=\int_0^t g(\tau)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}e^{kx(t-\tau)}\,d\tau.$$

Jeżeli M oznacza maksimum bezwzględnej wartości g w przedziale $[0,T]$, to

$$|L_n(x)|\leqslant\int_0^T M\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kxT}\,d\tau=MT\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kxT}=MT\Big(\exp(e^{xT})-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(e^{xT})^k\Big);$$

stąd widać, że $\lim\limits_{n\to\infty}L_n(x)=0$, gdyż ostatnia suma dąży w granicy do $\exp(e^{xT})$.

Wobec wzoru (10.6) mamy dalej

(10.7) $$\lim_{n\to\infty}I_n(x)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau+J(x).$$

Z drugiej strony jest

$$\Big|\int_t^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau\Big|\leqslant M\int_t^T e^{kx(t-\tau)}\,d\tau=\frac{M}{kx}(1-e^{-kx(T-t)})\leqslant\frac{M}{x};$$

ponieważ szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{M}{x}$ jest zbieżny, więc istnieje granica

(10.8) $$\lim_{n\to\infty}K_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_t^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau=K(x)$$

i zachodzi dla niej nierówność

$$|K(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{M}{x}\leqslant\frac{eM}{x}.$$

Z nierówności tej wynika, że

(10.9) $$\lim_{x\to\infty}K(x)=0.$$

Z (10.7) i (10.8) widać, że gdy n dąży do nieskończoności, to wzór (10.4) przechodzi w granicy we wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T e^{kx(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,d\tau+J(x)+K(x).$$

Ażeby stąd otrzymać wzór (10.1), wystarczy wobec (10.9) wykazać, że

(10.10) $$\lim_{x\to\infty}J(x)=0.$$

Istotnie, mamy

$$|J(x)|\leqslant M\int_0^t\exp[-e^{x(t-\tau)}]\,d\tau\leqslant M\int_0^t e^{x(t-\tau)}\exp[-e^{x(t-\tau)}]\,d\tau,$$

gdyż dopisany w ostatniej całce czynnik $e^{x(t-\tau)}$ jest w przedziale całkowania większy od 1. Ostatnią całkę można łatwo efektywnie wyliczyć, wprowadzając nową zmienną $u=e^{x(t-\tau)}$; w ten sposób znajdujemy dla całki wartość

$$\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e}-\exp(-e^{-xt})\Big).$$

Jest ona mniejsza od $1/ex$. Wobec tego mamy $|J(x)|<M/ex$, skąd wynika (10.10). Twierdzenie Phragména jest więc udowodnione.

§ 11. Twierdzenia o momentach

Korzystając z twierdzenia Phragména, udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

I. *Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[0,T]$ i istnieje taka liczba N, że*

(11.1) $$\Big|\int_0^T e^{nt}f(t)\,dt\Big|\leqslant N \quad \textit{dla} \quad n=1,2,\ldots,$$

to $f(t)=0$ w całym przedziale $[0,T]$.

D o w ó d. Wzór Phragména (10.1) można napisać w postaci

(11.2) $$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{-kx(T-t)}\int_0^T e^{kx(T-\tau)}g(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

dla każdego t, spełniającego nierówności $0\leqslant t<T$.

Gdy k i x są liczbami naturalnymi i

$$g(\tau)=f(T-\tau), \tag{11.3}$$

to na podstawie założenia (11.1) jest

$$\left|\int_0^T e^{kx(T-t)}g(\tau)\,d\tau\right|=\left|\int_0^T e^{kx(T-\tau)}f(t-\tau)\,d\tau\right|=\left|\int_0^T e^{kxt}f(t)\,dt\right|\leqslant N,$$

gdyż wówczas iloczyn kx jest również liczbą naturalną. Wobec tego wyrażenie pod znakiem lim we wzorze (11.2) jest niewiększe od

$$N\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{-kx(T-t)}=N[1-\exp(e^{-kx(T-t)})]$$

i tym samym dąży do zera, gdy x dąży do nieskończoności przez wartości naturalne[1]). Wobec tego prawa strona wzoru (11.2) musi być zerem

$$\int_0^t g(\tau)\,d\tau=0 \qquad (0\leqslant t<T).$$

Przez zróżniczkowanie tej równości mamy $g(t)=0$ dla $0<t<T$ i wobec (11.3) również $f(t)=0$ dla $0<t<T$. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc musi być $f(t)=0$ w całym przedziale $[0,T]$, co mieliśmy udowodnić.

Z udowodnionego twierdzenia wynika następujący wniosek:

II. *Jeżeli funkcja g jest ciągła w przedziale $[1,X]$ i istnieje taka liczba N, że*

$$\left|\int_1^X x^n g(x)\,dx\right|\leqslant N, \quad \textit{dla} \quad n=1,2,\ldots, \tag{11.4}$$

to $g(x)=0$ w całym przedziale $[1,X]$.

Istotnie, przez podstawienie $x=e^t$, $X=e^T$ i $xg(x)=f(t)$ nierówności (11.4) przechodzą w (11.1). Stąd wynika, że $f(t)=0$ w $[0,T]$, czyli że $xg(x)=0$ w $[1,X]$, co dowodzi twierdzenia.

Z twierdzenia II można łatwo wyprowadzić klasyczne *twierdzenie Lercha*[2]):

---

[1]) Istnienie granicy tego wyrażenia przy $x\to\infty$ jest zapewnione przez twierdzenie Phragména dla x przebiegającego *dowolne* wartości dodatnie; granica ta musi być zawsze zerem, skoro jest zerem, gdy x przebiega wartości naturalne.

[2]) Lerch [24], Mikusiński [29].

III. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[0,T]$ i*

$$\int_0^T t^n f(t)\,dt=0 \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots, \tag{11.5}$$

to $f(t)=0$ w całym przedziale $[0,T]$.

Dowód. Niech Θ będzie dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $(0,T)$. Przez podstawienie

$$t=\Theta x, \qquad T=\Theta X \quad \text{i} \quad f(t)=g(x)$$

z równości (11.5) otrzymujemy

$$\Theta^{n+1}\int_0^X x^n g(x)\,dx=0 \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots,$$

a stąd

$$\left|\int_1^X x^n g(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 x^n g(x)\,dx\right|\leqslant\int_0^1|g(x)|\,dx=N \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

Na podstawie twierdzenia II mamy więc $g(x)=0$ w przedziale $[1,X]$, czyli $f(t)=0$ w przedziale $[\Theta,T]$. Stąd wynika, że $f(t)=0$ dla wszystkich t z przedziału $(0,T]$, bo Θ może być ustalone dowolnie małe. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc musi być równa zeru także dla $t=0$ i dowód jest zakończony.

Uwaga. Całka $\int_a^b x^n f(x)\,dx$ nazywa się *n-tym momentem* funkcji $f(x)$ w przedziale $[a,b]$. Z tego powodu twierdzenia powyższe nazywamy *twierdzeniami o momentach.*

§ 12. Dowód twierdzenia Titchmarsha w przypadku $f=g$

Przypuśćmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[0,2T]$ i że

$$\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=0 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant t\leqslant 2T. \tag{12.1}$$

Udowodnimy, że wtedy $f(t)=0$ dla $0\leqslant t\leqslant T$.

Z równości (12.1) wynika, że

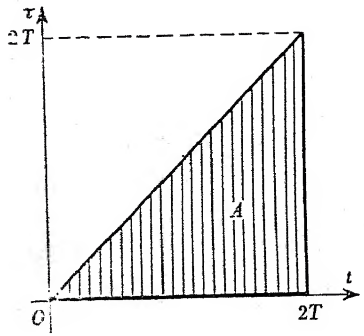
$$I_n=\int_0^{2T} e^{n(2T-t)}dt\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=0. \tag{12.2}$$

Całkę iterowaną (12.2) można przedstawić jako całkę podwójną

$$I_n = \iint\limits_A e^{n(2T-t)} f(t-\tau) f(\tau)\, dt\, d\tau,$$

gdzie obszar całkowania A jest trójkątem, określonym przez nierówności

$$0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 2T.$$



Rys. 3.

Po podstawieniu

$$t = 2T - u - v, \qquad \tau = T - v,$$

całka ta przyjmuje postać

$$I_n = \iint\limits_B e^{n(u+v)} f(T-u) f(T-v)\, du\, dv,$$

gdzie obszar całkowania B jest trójkątem określonym przez nierówności

$$0 \leqslant u+v, \qquad u \leqslant T, \qquad v \leqslant T.$$

Można napisać

$$\iint\limits_{B+C} = \iint\limits_B + \iint\limits_C,$$

gdzie obszar całkowania C jest trójkątem określonym przez nierówności

$$-T \leqslant u, \qquad -T \leqslant v, \qquad u+v \leqslant 0,$$

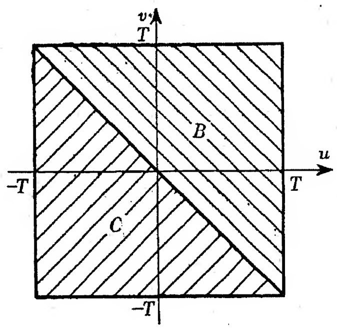
a obszar $B+C$ jest kwadratem, określonym przez nierówności

$$-T \leqslant u \leqslant T, \qquad -T \leqslant v \leqslant T.$$

Ponieważ $\iint\limits_B = I_n = 0$, więc

$$\iint\limits_{B+C} e^{nu} f(T-u) \cdot e^{nv} f(T-v)\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_C e^{n(u+v)} f(T-u) f(T-v)\, du\, dv.$$



Rys. 4.

Gdy $n > 0$, to czynnik $e^{n(u+v)}$ w całce po prawej stronie jest mniejszy od 1. Jeżeli więc M oznacza maksimum bezwzględnej wartości f,

to mamy stąd

$$\left| \int\limits_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \cdot \int\limits_{-T}^{T} e^{nv} f(T-v)\, dv \right| \leqslant \iint\limits_C M^2\, du\, dv = 2T^2 M^2$$

i w konsekwencji

$$\left| \int\limits_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant \sqrt{2}\, T M.$$

Wobec tego

$$\left| \int\limits_0^T e^{nu} f(T-u)\, du \right| = \left| \int\limits_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du - \int\limits_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, T M + \left| \int\limits_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right|.$$

Ale w ostatniej całce czynnik e^{nu} jest mniejszy od 1, więc

$$\left| \int\limits_0^T e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant \sqrt{2}\, T M + \int\limits_{-T}^{0} M\, du = (\sqrt{2}+1) T M.$$

Ponieważ ta nierówność jest prawdziwa dla każdego $n > 0$, więc na podstawie pierwszego twierdzenia o momentach musi być $f(T-u) = 0$ dla $0 \leqslant u \leqslant T$, czyli $f(t) = 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$, co mieliśmy udowodnić.

Jeżeli teraz f jest funkcją ciągłą w przedziale nieskończonym $0 \leqslant t < \infty$ i w tym przedziale zachodzi stale równość

$$\int\limits_0^t f(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = 0,$$

to tym samym równość ta zachodzi w każdym przedziale $[0, 2T]$. Musi więc być $f(t) = 0$ w każdym przedziale $[0, T]$ i w konsekwencji w całym przedziale nieskończonym $0 \leqslant t < \infty$. W symbolice operatorowej można to wypowiedzieć w postaci twierdzenia:

Jeżeli $f \in \mathfrak{C}$ *i* $f^2 = 0$, *to* $f = 0$.

Twierdzenie to można jeszcze wyrazić inaczej:

Jeżeli funkcja f klasy $\mathfrak{C}$ nie jest tożsamościowo równa zeru, to jej splot z samą sobą f^2 również nie jest tożsamościowo równy zeru.

Jest to więc szczególny przypadek twierdzenia Titchmarsha, wypowiedzianego na początku tego rozdziału.

§ 13. Dowód ogólny

C. Ryll-Nardzewski pokazał, że powyższy przypadek szczególny daje się łatwo uogólnić na zupełnie dowolne funkcje f i g klasy $\mathcal{C}$.

Przypuśćmy, że splot funkcyj f i g (klasy $\mathcal{C}$) jest tożsamościowo równy zeru

$$fg=0.$$

Znaczy to, że

(13.1) $$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau=0 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant t<\infty.$$

Wobec tego w przedziale $0\leqslant t<\infty$ jest też

(13.2) $$\int_0^t (t-\tau)f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau+\int_0^t f(t-\tau)\cdot\tau g(\tau)\,d\tau=t\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau=0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$f_1(t)=tf(t) \quad \text{i} \quad g_1(t)=tg(t) \qquad (0\leqslant t<\infty),$$

można równość (13.2) zapisać w symbolice operatorowej

$$f_1g+fg_1=0.$$

Stąd mamy $fg_1(f_1g+fg_1)=0$ i, korzystając z praw łączności, przemienności i rozdzielności splotu,

$$fg\cdot f_1g_1+(fg_1)^2=0.$$

Ponieważ z założenia jest $fg=0$, więc ostatnia równość redukuje się do równości $(fg_1)^2=0$. Stąd na podstawie twierdzenia udowodnionego w poprzednim paragrafie mamy

$$fg_1=0,$$

czyli

(13.3) $$\int_0^t f(t-\tau)\cdot\tau g(\tau)\,d\tau=0 \qquad (0\leqslant t<\infty).$$

Ponieważ równość (13.3) wynika z równości (13.1), więc tak samo z równości (13.3) wynika dalej, że

$$\int_0^t f(t-\tau)\cdot\tau^2 g(\tau)\,d\tau=0 \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

i ogólnie

$$\int_0^t f(t-\tau)\cdot\tau^n g(\tau)\,d\tau=0 \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

dla każdego n naturalnego.

Stąd mamy na podstawie twierdzenia Lercha (zob. § 11)

$$f(t-\tau)g(\tau)=0 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant\tau\leqslant t<\infty.$$

Jeżeli dla pewnego $\tau_0\geqslant 0$ jest $g(\tau_0)\neq 0$, to z równości $f(t-\tau_0)g(\tau_0)=0$ odczytujemy, że $f=0$ w całym przedziale nieskończonym $0\leqslant t<\infty$. Jeżeli zaś takie τ_0 nie istnieje, to $g=0$ w całym tym przedziale.

Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie, że *jeżeli splot fg jest tożsamościowo równy zeru, to co najmniej jedna z funkcyj f lub g jest tożsamościowo równa zeru.*

Można też inaczej powiedzieć: *Jeżeli funkcje f i g nie są tożsamościowo równe zeru, to splot fg również nie jest tożsamościowo równy zeru.*

A tak właśnie na początku tego rozdziału sformułowaliśmy *twierdzenie Titchmarsha.*

ROZDZIAŁ III

Operatory

§ 14. Działanie odwrotne do splotu

Podobnie jak w algebrze tak i w rachunku operatorów można wprowadzić ułamki

$$\frac{a}{b};$$

dla wygody symbol ten będziemy nieraz zapisywać w postaci a/b. Zauważmy od razu, że jeżeli a i b są funkcjami i przez ab rozumiemy ich splot, to przez a/b nie należy rozumieć zwykłego dzielenia, lecz działanie odwrotne do splotu. Symbol a/b (gdzie b nie jest tożsamościowo zerem) będzie wówczas oznaczał taką funkcję c, że

$$a = bc. \tag{14.1}$$

Jeżeli na przykład $a=\{t^3\}$ i $b=\{t\}$, to

$$\frac{a}{b}=\frac{\{t^3\}}{\{t\}}=\{6t\},$$

gdyż

$$\{t\}\{6t\}=\left\{\int_0^t (t-\tau)6\tau\, d\tau\right\}=\{t^3\}.$$

Aby definicja symbolu a/b była jednoznaczna, potrzeba, żeby przy zadanych a i b (b nie równe tożsamościowo zeru) istniała co najwyżej jedna funkcja c, spełniająca równość (14.1). Jednoznaczność tę zapewnia udowodnione w rozdziale 2 twierdzenie Titchmarsha:

Jeżeli funkcje f i g klasy $\mathcal{C}$ (zob. § 2, str. 2) *nie są tożsamościowo równe zeru, to ich splot fg również nie jest tożsamościowo równy zeru.*

Gdyby równość (14.1) była spełniona przez dwie różne funkcje c_1 i c_2, to znaczy gdyby było $a=bc_1$ i $a=bc_2$, to mielibyśmy

$$b(c_1-c_2)=0$$

i splot dwóch funkcyj b i (c_1-c_2), nie równych tożsamościowo zeru, byłby równy zeru, wbrew twierdzeniu Titchmarsha. Zatem równość (14.1) może być spełniona co najwyżej przez jedną funkcję c, co dowodzi jednoznaczności symbolu a/b.

Ćwiczenia. Sprawdzić równości:

(α) $\dfrac{\{t^2\}}{\{t\}}=\{2\}$, (β) $\dfrac{\{t^3-6t\}}{\{t-1\}}=\{6t+6\}$, (γ) $\dfrac{\{e^t-\sin t-\cos t\}}{\{\sin t\}}=\{2e^t\}$.

§ 15. Operatory

Może się zdarzyć, że dla danych funkcyj a i $b\neq\{0\}$ klasy $\mathcal{C}$ nie istnieje funkcja c, która by spełniała równanie $a=bc$. Weźmy na przykład $a=b=\{1\}$; wówczas równość $\{1\}=\{1\}c$ nie może zachodzić dla żadnej funkcji $c=\{c(t)\}$, oznaczałoby to bowiem, że

$$1=\int_0^t c(\tau)\,d\tau$$

dla każdego $t\geqslant 0$. A to jest nieprawdą już dla $t=0$. Podobnych przykładów można by podać bardzo dużo.

Ze zjawiskiem niewykonalności działania odwrotnego spotykamy się już na elementarnym szczeblu matematyki. Mianowicie w arytmetyce *liczb całkowitych* nie zawsze dzielenie jest wykonalne. Na przykład liczba 2 nie dzieli się przez 3. Ale zwróćmy uwagę na to, że właśnie *niewykonalność dzielenia jest źródłem nowego rodzaju liczb*, jakimi są ułamki. Przyjmujemy mianowicie, że iloraz 2 przez 3 jest nową liczbą (już nie całkowitą), którą zapisujemy w postaci ułamka $\frac{2}{3}$. Ogólnie, jeżeli jakaś liczba całkowita a nie dzieli się bez reszty przez inną liczbę całkowitą b, to przyjmujemy, że ich iloraz jest równy ułamkowi a/b.

Dopuszczamy również takie ułamki a/b, w których licznik a daje się bez reszty podzielić przez mianownik b, na przykład $\frac{6}{3}$. Dzięki temu można ułamki uważać za uogólnienie pojęcia liczby (całkowitej). Każda liczba całkowita c jest ułamkiem [gdyż daje się przedstawić w postaci cb/b $(b\neq 0)$], ale nie każdy ułamek jest liczbą całkowitą.

Podobnie, *niewykonalność działania odwrotnego do splotu prowadzi do nowego pojęcia matematycznego, jakim są operatory.*

Ułamek $\{1\}/\{1\}$ przedstawia więc *operator* (który już nie jest funkcją). Ogólnie, jeżeli dla dwóch danych funkcyj a i $b \neq \{0\}$ klasy $\mathcal{C}$ nie istnieje funkcja c, spełniająca równanie $a = bc$, to ułamek a/b przedstawia *operator*.

Dopuszczamy również takie operatory a/b, dla których istnieje taka funkcja c klasy $\mathcal{C}$, że $a = bc$. Dzięki temu można operatory uważać za uogólnienie pojęcia funkcji. Każda funkcja c klasy $\mathcal{C}$ jest operatorem (gdyż daje się przedstawić w postaci cb/b, gdzie $b \neq \{0\}$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}$), ale nie każdy operator jest funkcją.

§ 16. Działania na operatorach

Wprowadzenie operatorów postaci a/b nabiera wartości dopiero wtenczas, gdy określimy na nich pewne działania, które pozwolą posługiwać się nimi w rachunkach.

W zwykłej arytmetyce przyjmuje się dla ułamków definicje:

1. Piszemy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ad = bc$;

2. $\dfrac{a}{b}\,\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

3. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

Zakładamy przy tym stale, że mianowniki b i d są różne od zera; wówczas również mianownik bd jest różny od zera.

Dla operatorów a/b przyjmujemy takie same definicje 1, 2 i 3. Nie będziemy tych wzorów drugi raz przepisywać; rozumie się samo przez się, że w przypadku operatorów litery a, b, c i d nie oznaczają już liczb całkowitych, lecz funkcje klasy $\mathcal{C}$.

Zakładamy przy tym stale, że mianowniki b i d nie są tożsamościowo równe zeru; z twierdzenia Titchmarsha wynika wówczas, że również mianownik bd nie jest tożsamościowo zerem.

Dzięki zupełnej analogii operatorów z ułamkami klasycznej arytmetyki, rachunki na operatorach wykonuje się tak samo jak na zwykłych ułamkach.

Ćwiczenia. Udowodnić równości:

(α) $\dfrac{\{t\}}{\{e^t\}} \cdot \dfrac{\{te^t\}}{\{1\}} = \{e^t - 1\}$, (β) $\dfrac{\{1\}}{\{\cos t\}} + \dfrac{\{3t^2\}}{\{2\}} = \dfrac{\{2t\}}{\{\sin 2t\}}$.

§ 17. Operatory liczbowe

Zajmiemy się teraz operatorami postaci $\dfrac{\{\alpha\}}{\{1\}}$, gdzie $\{\alpha\}$ jest dowolną funkcją stałą (to znaczy przyjmującą wszędzie wartość α); oznaczymy je symbolem $[\alpha]$:

$$[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}.$$

Łatwo jest sprawdzić wzory

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \qquad [\alpha]\,[\beta] = [\alpha\beta]. \tag{17.1}$$

Istotnie, pisząc dla uproszczenia $l = \{1\}$, mamy

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l} + \frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\} + \{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha+\beta\}}{l} = [\alpha + \beta],$$

$$[\alpha]\,[\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l}\,\frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{l^2} = \frac{l\{\alpha\beta\}}{l^2} = \frac{\{\alpha\beta\}}{l} = [\alpha\beta].$$

Operatory typu $[\alpha]$ będziemy nazywali *operatorami liczbowymi.* Należy je odróżniać od operatorów $\{\alpha\}$, które są *funkcjami* stałymi i dla których w miejsce wzorów (17.1) zachodzą wzory

$$\{\alpha\} + \{\beta\} = \{\alpha + \beta\}, \qquad \{\alpha\}\,\{\beta\} = \{\alpha\beta t\}.$$

Jest więc na przykład

$$[2]\,[3] = [6], \qquad \{2\}\,\{3\} = \{6t\}.$$

Dzięki wzorom (17.1) można w rachunku operatorów opuszczać nawiasy kwadratowe [ ]; zamiast więc $[\alpha]$ będziemy po prostu pisać α. Uproszczenie to daje jeszcze tę korzyść, że wzory (17.1) przyjmują wtedy postać

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta, \qquad \alpha\beta = \alpha\beta,$$

czyli stają się w ogóle zbyteczne.

§ 18. Uwagi terminologiczne

Równości (17.1) pozwalają na zajęcie bardziej jeszcze radykalnego stanowiska. Dzięki nim operatory liczbowe zachowują się w rachunkach jak zwykłe liczby. Można więc *zidentyfikować* operatory liczbowe z liczbami i nazywać je po prostu *liczbami*. Podobnie w arytmetyce ułamki o mianowniku 1 identyfikuje się z liczbami

całkowitymi, podobnie też liczby zespolone o części urojonej równej zeru identyfikuje się z liczbami rzeczywistymi. Daje to tę korzyść, że nie ma potrzeby rozważać w dalszym ciągu osobno każdy z tych rodzajów liczb, wszystkie bowiem podpadają ostatecznie pod pojęcie liczby zespolonej.

W naszym przypadku liczby zespolone podpadają pod pojęcie operatorów. Operatory stanowią więc nie tylko uogólnienie pojęcia funkcji, ale jednocześnie uogólniają liczby zespolone. Różne etapy uogólnień liczb można przedstawić w postaci następującego łańcucha:

liczby całkowite $\subset$ liczby wymierne $\subset$ liczby rzeczywiste $\subset$
$\subset$ liczby zespolone $\subset$ operatory.

W paragrafie 16 zdefiniowaliśmy sens wyrażenia

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}. \tag{18.1}$$

Jeżeli operatory a/b i c/d redukują się do funkcyj, to wyrażenie (18.1) oznacza ich splot; jeżeli zaś redukują się do liczb, to wyrażenie (18.1) oznacza zwykły iloczyn. Zatem wyrażenie (18.1) przedstawia działanie, które jest jednocześnie uogólnieniem splotu i zwykłego iloczynu. Mając teraz wybór w ustaleniu nazwy w przypadku ogólnym, ze względów praktycznych przyjmiemy nazwę *iloczyn*. Wtedy bowiem będziemy mogli swobodnie używać również innych terminów związanych z iloczynem, na przykład *mnożenie*, *czynnik*, *potęga*, *dzielenie*, *odwrotność* itd. Nasuwa się też możliwość zastąpienia nazwy *splot funkcyj* przez *iloczyn funkcyj*; wtedy zwykły iloczyn należałoby dla odróżnienia nazywać *iloczynem wartości funkcyj*. Zachowamy jednak nazwę *splot*, zwłaszcza w przypadkach, gdzie mogłaby zachodzić obawa nieporozumienia.

Pewnego wyjaśnienia wymaga również sama nazwa *operator*. Pochodzi ona stąd, że rozważane pojęcie obejmuje nie tylko liczby i funkcje, ale również wiele elementów odpowiadających temu, co w dotychczasowej literaturze nosi nazwę *operatorów*. Operatory te oraz funkcje, na które one działają, tworzą w dawniejszym ujęciu rachunku operatorów dwie odrębne klasy elementów. W tej książce rola obydwu rodzajów elementów jest symetryczna, gdyż wchodzą one wszystkie do wspólnej klasy ułamków a/b, obejmującej również liczby. Wobec tego nazwy *liczba*, *funkcja* i *operator* można by *a priori* uważać za równouprawnione do tego, żeby całość objąć przez jedną z tych nazw. Jednakże ze względu na tradycję rachunku operatorów najodpowiedniejsza wydaje się nazwa ostatnia.

§ 19. Iloczyn liczby i funkcji

Łatwo jest udowodnić, że dla dowolnej liczby α i dowolnej funkcji stałej $\{\beta\}$ zachodzi wzór

$$\alpha\{\beta\}=\{\alpha\beta\}.$$

Istotnie,

$$\alpha\{\beta\}=\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{l}=\frac{\{\alpha\beta t\}}{l}=\frac{l\{\alpha\beta\}}{l}=\{\alpha\beta\}.$$

Dla ilustracji zestawmy obok siebie wzory

$$2\cdot 3=6,\qquad 2\{3\}=\{6\},\qquad \{2\}\{3\}=\{6t\}.$$

Pierwszy z nich wyraża, że iloczyn liczb 2 i 3 jest równy liczbie 6; drugi, że iloczyn liczby 2 i funkcji stałej $\{3\}$ jest równy funkcji stałej $\{6\}$; wreszcie trzeci, że iloczyn (splot) dwóch funkcyj $\{2\}$ i $\{3\}$ jest równy funkcji $\{6t\}$.

Jako szczególny przypadek wzoru $\alpha\{\beta\}=\{\alpha\beta\}$ otrzymujemy dla $\beta=1$

$$\alpha l=\{\alpha\}.$$

Zatem każda funkcja stała $\{\alpha\}$ daje się przedstawić jako iloczyn liczby α i operatora całkowego l.

Zauważmy, że zachodzi wzór ogólny

$$\alpha\{f(t)\}=\{\alpha f(t)\}, \tag{19.1}$$

który wyraża, że *pomnożenie funkcji $f(t)$ przez liczbę znaczy to samo co pomnożenie jej wartości przez tę liczbę*.

Istotnie, mamy

$$\alpha\{f(t)\}=\frac{\{\alpha\}\{f(t)\}}{l}=\frac{\{\int_0^t \alpha f(\tau)d\tau\}}{l}=\frac{l\{\alpha f(t)\}}{l}=\{\alpha f(t)\}.$$

Wzór (19.1) wyraża prawidło praktyczne, pozwalające włączać czynnik liczbowy pod znak klamry.

Zauważmy, że dla dodawania nie istnieje wzór analogiczny do (19.1). Sumę liczby α i funkcji $\{f(t)\}$ możemy zapisać jedynie w postaci $\alpha+\{f(t)\}$; suma ta jest operatorem, który można co najwyżej sprowadzić do postaci ułamkowej $\dfrac{\{\alpha+\int_0^t f(\tau)d\tau\}}{\{1\}}$. Dla operatorów tego typu zachodzi, jak łatwo zauważyć na podstawie

praw przemienności i łączności, wzór

$$(\alpha+\{f(t)\})\,(\beta+\{g(t)\})=\alpha\beta+\Big\{\beta f(t)+\alpha g(t)+\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\Big\}.$$

Ćwiczenia. Sprawdzić równości:

(α) $(1+l)\,(1-l)=1-\{t\}$, (β) $(1+2l)^3=1+2\{3+6t+2t^2\}$,

(γ) $(1+\{1\})\,(1-\{e^{-t}\})=1$, ($\delta$) $(1+\{t\})\,(1-\{\sin t\})=1$,

(ε) $(1+\{4t\})\,(1+2\{\cos 2t-\sin 2t\})=1+\{2\}$.

§ 20. Liczby 0 i 1

Zastępując we wzorze (19.1) a przez 1 otrzymujemy równość $1\{f(t)\}=\{f(t)\}$. Łatwo udowodnić ogólnie, że jeżeli c jest dowolnym operatorem, to zawsze zachodzi równość

$$1c=c. \tag{20.1}$$

Istotnie, pisząc $1=l/l$ i $c=a/b$, gdzie a i b są funkcjami klasy $\mathcal{C}$, mamy na podstawie definicji równości i mnożenia operatorów $la/lb=a/b$, skąd wynika równość (20.1).

Dla liczby 0 udowodnimy wzory ogólne:

$$0c=0, \quad c+0=c. \tag{20.2}$$

Istotnie, pisząc $0=\{0\}/l$ i $c=a/b$, gdzie a i $b\neq\{0\}$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}$, mamy

$$0c=\frac{\{0\}a}{lb}=\frac{\{0\}}{lb}=\frac{\{0\}b}{lb}=\frac{\{0\}}{l}=0,$$

$$c+0=\frac{a}{b}+\frac{\{0\}}{l}=\frac{al+\{0\}b}{bl}=\frac{al+\{0\}}{bl}=\frac{al}{bl}=\frac{a}{b}=c.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\{0\}=0;$$

istotnie, wynika to z równości $0l=\{0\}$ oraz z pierwszego z wzorów (20.2). Wobec tego funkcję $\{0\}$ należy zidentyfikować z liczbą 0. Jest to wyjątek od zasady przyjętej w § 6, gdzie kładliśmy nacisk na konieczność odróżniania funkcji od liczby. Otóż $\{0\}$ jest jedyną funkcją, która posiada wobec dodawania i mnożenia te same własności co liczba 0; wskutek tego można ją we wszystkich wzorach zastępować przez liczbę 0 i odwrotnie. I na tym właśnie polega identyfikacja symbolów $\{0\}$ i 0.

§ 21. Operator różniczkowy

Operatory można przez siebie dzielić. Jeżeli na przykład $g=a/b$, $h=c/d$, to

$$\frac{g}{h}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

W tym przykładzie licznik i mianownik ułamka g/h są dowolnymi operatorami, a już nie koniecznie funkcjami.

W szczególności $1/h$ nazywamy *odwrotnością operatora* h. Zauważmy, że jeżeli h jest funkcją, to odwrotność $1/h$ nie może być funkcją. Istotnie, gdyby h i $1/h$ były funkcjami, to iloczyn $h\cdot 1/h$ byłby również funkcją, podczas gdy jest operatorem liczbowym 1.

Podstawową rolę w rachunku operatorów gra odwrotność operatora całkowego $l=\{1\}$, którą oznaczać będziemy przez

$$s=\frac{1}{l}.$$

Wobec tej definicji mamy

$$ls=sl=1.$$

Udowodnimy następujące ważne

Twierdzenie[1]. *Jeżeli funkcja $a=\{a(t)\}$ ma pochodną $a'=\{a'(t)\}$ ciągłą dla $0\leqslant t<\infty$, to zachodzi wzór*

$$sa=a'+a(0), \tag{21.1}$$

gdzie $a(0)$ jest wartością funkcji a w punkcie $t=0$.

Istotnie, mamy

$$\{a(t)\}=\Big\{\int_0^t a'(\tau)\,d\tau\Big\}+\{a(0)\},$$

czyli

$$\{a(t)\}=l\{a'(t)\}+la(0).$$

Stąd, mnożąc obustronnie przez s, otrzymujemy wzór (21.1).

Jeżeli funkcja a jest równa zeru w punkcie $t=0$, to wzór (21.1) redukuje się do postaci

$$sa=a';$$

w tym więc przypadku mnożenie funkcji przez operator s oznacza po prostu jej zróżniczkowanie. Z tego powodu s będziemy nazywać *operatorem różniczkowym*.

---

[1]) Twierdzenie to uogólnimy w § 56.

Należy jednak pamiętać, że w ogólnym przypadku pomnożenie przez s oznacza zróżniczkowanie funkcji i dodanie jej wartości początkowej. W wyniku daje to operator, który redukuje się do funkcji tylko wtedy, gdy wartość początkowa funkcji danej jest zerem.

Przykłady.

$$s\{\sin t\}=\{\cos t\}, \qquad s\{e^t\}=\{e^t\}+1,$$

$$s\{t^n\}=\{nt^{n-1}\} \text{ dla } n\geqslant 1, \qquad s\{t+1\}=\{1\}+1.$$

Przez operator różniczkowy można mnożyć nie tylko funkcje różniczkowalne. Iloczyn sa będzie miał zawsze sens, bez względu na to, czy a jest funkcją różniczkowalną, nieróżniczkowalną (klasy $\mathcal{C}$) czy zgoła dowolnym operatorem. Jeżeli więc mnożenie przez s uważamy za uogólnienie różniczkowania, to w zakresie operatorów funkcja ciągła (a nawet każda całkowalna) jest różniczkowalna (wynik różniczkowania jest operatorem, a już niekoniecznie funkcją).

Uwaga. Może się w pierwszej chwili wydawać, że rachunki byłyby wygodniejsze, gdyby mnożenie funkcji różniczkowalnej przez s było dokładnie równoważne różniczkowaniu, to znaczy gdyby nie trzeba było jeszcze dodawać wartości początkowej. Łatwo jednak zauważyć, że zwykłe różniczkowanie nie jest przemienne z całkowaniem (w granicach od 0 do t); jeżeli na przykład zróżniczkujemy funkcję $\{\cos t\}$ a potem scałkujemy, to otrzymamy $\{\cos t-1\}$; wykonując zaś te działania w porządku odwrotnym, otrzymamy $\{\cos t\}$. Dla prostoty rachunku operatorów decydujące znaczenie ma postulat, by operatory różniczkowy i całkowy były przemienne: $sl=ls$. A przemienność tę uzyskujemy właśnie dzięki definicji podanej w tym paragrafie.

§ 22. Potęgi operatora s

Jeżeli funkcja $a=\{a(t)\}$ ma drugą pochodną $a''=\{a''(t)\}$ ciągłą w przedziale $0\leqslant t<\infty$, to mnożąc (21.1) przez s otrzymamy

$$s^2a=sa'+s\cdot a(0),$$

skąd, stosując jeszcze raz wzór (21.1) do pochodnej a',

$$s^2a=a''+a'(0)+s\cdot a(0).$$

Ogólnie mamy twierdzenie:

Jeżeli funkcja $a=\{a(t)\}$ ma n-tą pochodną $a^{(n)}=\{a^{(n)}(t)\}$ ciągłą w przedziale $0\leqslant t<\infty$, to

$$s^na=a^{(n)}+a^{(n-1)}(0)+sa^{(n-2)}(0)+\ldots+s^{n-1}a(0).$$

Ze względu na zastosowanie przy rozwiązywaniu równań różniczkowych najwygodniej jest zapisać ostatni wzór w postaci

$$a^{(n)}=s^na-s^{n-1}a(0)-\ldots-sa^{(n-2)}(0)-a^{(n-1)}(0).$$

Ćwiczenie. Sprawdzić równości:

(α) $s^2\{\sin t\}=1-\{\sin t\}$, ($\beta$) $s^2\{\cos t\}=s-\{\cos t\}$.

§ 23. Wielomiany operatora s

Ważną rolę w zastosowaniach grają operatory w kształcie wielomianów

$$\alpha_ns^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_1s+\alpha_0, \tag{23.1}$$

gdzie $\alpha_n,\ldots,\alpha_0$ są dowolnymi liczbami. Działania na tych wielomianach wykonuje się tak samo jak w zwykłej algebrze, na przykład:

$$(s-1)(s^{n-1}+s^{n-2}+\ldots+1)=s^n-1.$$

Jeżeli dwa wielomiany operatora s są sobie równe, to mają współczynniki odpowiednio równe, to znaczy z równości

$$\alpha_ns^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_1s+\alpha_0=\beta_ns^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\beta_1s+\beta_0 \tag{23.2}$$

wynikają zawsze równości

$$\alpha_n=\beta_n,\quad \alpha_{n-1}=\beta_{n-1},\quad \ldots,\quad \alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_0=\beta_0. \tag{23.3}$$

Istotnie, mnożąc równość (23.2) przez l^{n+1}, mamy

$$\alpha_nl+\ldots+\alpha_0l^{n+1}=\beta_nl+\ldots+\beta_0l^{n+1};$$

równość ta oznacza, że

$$\alpha_n+\ldots+\alpha_0\frac{t^n}{n!}=\beta_n+\ldots+\beta_0\frac{t^n}{n!} \quad \text{dla} \quad 0\leqslant t<\infty.$$

Stąd na podstawie znanego już twierdzenia o zwykłych wielomianach wynikają równości (23.3).

Ćwiczenia. 1. Udowodnić wzór

$$1+s+s^2+\ldots+s^{n-1}=(s^n-1)\{e^t\}.$$

2. Sprawdzić, że

$$\gamma^4s^4+\delta^4=\gamma^4[(s-\alpha)^2+\alpha^2][(s+\alpha)^2+\alpha^2] \quad \text{dla} \quad \alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\delta}{\gamma}.$$

§ 24. Związki operatora s z funkcją wykładniczą

Stosując wzór (21.1) do funkcji $\{e^{\alpha t}\}$, znajdujemy równość

$$s\{e^{\alpha t}\} = 1 + \alpha\{e^{\alpha t}\},$$

z której łatwo wyliczamy

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}. \tag{24.1}$$

Na podstawie definicji splotu mamy

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2} = \{e^{\alpha t}\}^2 = \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\alpha\tau} d\tau\right\} = \left\{e^{\alpha t}\int_0^t d\tau\right\} = \left\{\frac{t}{1!} e^{\alpha t}\right\},$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^3} = \{e^{\alpha t}\}\left\{\frac{t}{1!} e^{\alpha t}\right\} = \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \frac{\tau}{1!} e^{\alpha\tau} d\tau\right\} = \left\{e^{\alpha t}\int_0^t \frac{\tau}{1!} d\tau\right\} = \left\{\frac{t^2}{2!} e^{\alpha t}\right\}$$

i ogólnie

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24.2}$$

Wzór ten jest uogólnieniem wzoru $l^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ wyprowadzonego w paragrafie 8 (str. 8) i sprowadza się do niego przez podstawienie $\alpha = 0$.

§ 25. Związki operatora s z funkcjami trygonometrycznymi

Na podstawie znanych wzorów Eulera

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

mamy

$$\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \frac{1}{2i}\{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\}, \qquad \{e^{\alpha t}\cos\beta t\} = \frac{1}{2}\{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Korzystając z (24.1) możemy napisać

$$\left\{\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t\right\} = \frac{1}{2i\beta}\left(\frac{1}{s-\alpha-i\beta} - \frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right) = \frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$\{e^{\alpha t}\cos\beta t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha-i\beta} + \frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Wyprowadziliśmy więc wzory

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t\right\} \quad (\beta > 0), \qquad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \{e^{\alpha t}\cos \beta t\}. \tag{25.1}$$

Potęgi operatora $1/[(s-\alpha)^2+\beta^2]$ można obliczać przez kolejne wykonywanie splotu:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{\frac{1}{\beta^2}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \sin\beta(t-\tau)\cdot e^{\alpha\tau}\sin\beta\tau\, d\tau\right\} =$$
$$= \left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[\frac{1}{\beta}\sin\beta t - t\cos\beta t\right]\right\},$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^3} = \left\{\frac{1}{2\beta^3}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\sin\beta(t-\tau)\cdot\left[\frac{1}{\beta}e^{\alpha\tau}\sin\beta\tau - \tau e^{\alpha\tau}\cos\beta\tau\right]d\tau\right\} =$$
$$= \left\{\frac{e^{\alpha t}}{4\beta^4}\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\beta^2 t^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\beta}\sin\beta t - \frac{3}{2}t\cos\beta t\right]\right\}.$$

Ogólny wzór jest dość skomplikowany. Wyprowadzimy go w paragrafie 63 części II.

Ważny jest szczególny przypadek wzorów (25.1), który otrzymujemy podstawiając $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{s^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right\}, \qquad \frac{s}{s^2+\beta^2} = \{\cos\beta t\}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić wzory

(α) $\dfrac{1}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \left\{\dfrac{1}{\beta} e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t\right\}$ $(\beta > 0)$; (β) $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \{e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\beta t\}$.

§ 26. Wyrażenia wymierne operatora s

Z algebry wiadomo, że każde wyrażenie

$$\frac{\gamma_m s^m + \ldots + \gamma_1 s + \gamma_0}{\delta_n s^n + \ldots + \delta_1 s + \delta_0} \qquad (m < n), \tag{26.1}$$

gdzie $\gamma_m, \ldots, \gamma_0$ i $\delta_n, \ldots, \delta_0$ są liczbami rzeczywistymi, daje się rozbić na ułamki proste następujących kształtów:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}, \qquad \frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p}, \qquad \frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p},$$

gdzie α i β są również liczbami rzeczywistymi, a p liczbą naturalną. Ułamki dwóch pierwszych typów można, korzystając z metody podanej w poprzednim paragrafie, przedstawić zawsze za pomocą funkcji wykładniczej i funkcyj trygonometrycznych. W ułamkach trzeciego typu dochodzi jeszcze czynnik s, można więc je również sprowadzić do funkcji wykładniczej i funkcyj trygonometrycznych

przez zastosowanie wzoru (21.1). Na przykład:

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}=s\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[\frac{1}{\beta}\sin\beta t-t\cos\beta t\right]\right\};$$

ponieważ wyrażenie w klamrze { } jest równe zeru dla $t=0$, pochodna zaś z tego wyrażenia ma postać

$$\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[(\alpha+\beta^2 t)\frac{1}{\beta}\sin\beta t-\alpha t\cos\beta t\right],$$

więc

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}[(\alpha+\beta^2 t)\frac{1}{\beta}\sin\beta t-\alpha t\cos\beta t]\right\}.$$

Ostatecznie każde wyrażenie wymierne (26.1) daje się przez rozkład na ułamki proste sprowadzić do funkcji wykładniczej i do funkcyj trygonometrycznych. Przy rozkładzie na ułamki proste najlepiej stosować, podobnie jak się to robi w rachunku całkowym, metodę współczynników nieoznaczonych.

P r z y k ł a d y.

1. Obliczyć $\dfrac{s+1}{s^2+2s}$.

Mianownik rozkłada się tu na dwa różne czynniki liniowe: s i $s+2$. Można więc znaleźć takie liczby A i B, że

$$\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}.$$

Mnożąc tę równość obustronnie przez $s(s+2)$, mamy

$$s+1=(A+B)s+2A.$$

Równość ta będzie spełniona, gdy $A+B=1$ i $2A=1$, to znaczy, gdy $A=B=\frac{1}{2}$. Stąd

$$\frac{s+1}{s^2+2s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

i ostatecznie

$$\frac{s+1}{s^2+2s}=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right\}$$

2. Obliczyć $\dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$.

Szukamy takich stałych A, B i C, żeby

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+4}.$$

Mnożąc tę równość obustronnie przez $(s-1)(s^2+2s+5)$ i porównując następnie współczynniki przy równych potęgach, znajdujemy

$$A=1,\quad B=-1\quad \text{i}\quad C=3.$$

Zatem

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}=\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{3}{(s+1)^2+4}=$$
$$=\left\{e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t\right\}.$$

3. Obliczyć $\dfrac{1}{s(2s+1)^3}$.

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{1}{s(2s+1)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{2}}+\frac{C}{(s+\frac{1}{2})^2}+\frac{D}{(s+\frac{1}{2})^3}=$$
$$=\frac{8[A(s+\frac{1}{2})^3+Bs(s+\frac{1}{2})^2+Cs(s+\frac{1}{2})+Ds]}{s(2s+1)^3}.$$

Porównując w licznikach współczynniki przy równych potęgach s, dochodzimy do równości

$$0=8A+8B,\qquad 0=6A+2B+4C+8D,$$
$$0=12A+8B+8C,\qquad 1=A.$$

Rozwiązując ten układ równań znajdujemy

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-\tfrac{1}{2},\quad D=-\tfrac{1}{4}.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{s(2s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2(s+\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4(s+\frac{1}{2})^3}=$$
$$=\{1-e^{-t/2}-\tfrac{1}{2}te^{-t/2}-\tfrac{1}{8}t^2e^{-t/2}\}=$$
$$=\{1-\tfrac{1}{8}(8+4t+t^2)e^{-t/2}\}.$$

4. Obliczyć $\dfrac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1}$.

Piszemy

$$\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1}=\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{(s-1)(s+1)(s^2+1)^3}=$$

$$=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}+\frac{Es+F}{(s^2+1)^2}+\frac{Gs+H}{(s^2+1)^3}=$$

$$=\frac{[A(s+1)+B(s-1)](s^2+1)^3+[(Cs+D)(s^2+1)^2+(Es+F)(s^2+1)+Gs+H](s^2-}{(s-1)(s+1)(s^2+1)^3}$$

Porównanie współczynników w licznikach daje nam równości

$$\begin{aligned} 0&=A+B+C, & 0&=3A+3B-C+G,\\ 2&=A-B+D, & 3&=3A-3B-D+H,\\ 0&=3A+3B+C+E, & 0&=A+B-C-E-G,\\ 6&=3A-3B+D+F, & 5&=A-B-D-F-H. \end{aligned}$$

Stąd

$$A=1,\quad B=-1,\quad H=-3,\quad C=D=E=F=G=0$$

i

$$\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}-\frac{3}{(s^2+1)^3}=$$

$$=\left\{e^t-e^{-t}-\frac{3}{8}(3-t^2)\sin t+\frac{9}{8}t\cos t\right\}.$$

Jeżeli $m\geqslant n$, to wyrażenie (26.1) przedstawiamy jako sumę wielomianu operatora s i ułamka, w którym stopień licznika jest już mniejszy od stopnia mianownika. Po tym przekształceniu możemy już stosować metodę rozkładu na ułamki proste.

Przykład.

$$\frac{s^3}{s-1}=s^2+s+1+\frac{1}{s-1}=s^2+s+1+\{e^t\}.$$

Udowodnimy jeszcze następujące twierdzenie:

Jeżeli

(26.2) $$\frac{\alpha_m s^m+\ldots+\alpha_0}{\beta_n s^n+\ldots+\beta_0}=\frac{\gamma_p s^p+\ldots+\gamma_0}{\delta_q s^q+\ldots+\delta_0},$$

to dla każdej liczby ξ (rzeczywistej lub zespolonej), takiej że

(26.3) $$\beta_n\xi^n+\ldots+\beta_0\neq 0 \quad \text{i} \quad \delta_q s^q+\ldots+\delta_0\neq 0,$$

zachodzi równość

$$\frac{\alpha_m\xi^m+\ldots+\alpha_0}{\beta_n\xi^n+\ldots+\beta_0}=\frac{\gamma_p\xi^p+\ldots+\gamma_0}{\delta_q\xi^q+\ldots+\delta_0}.$$

Dowód. Z równości (26.2) wynika, że

$$(\alpha_m s^m+\ldots+\alpha_0)(\delta_q s^q+\ldots\delta_0)=(\gamma_p s^p+\ldots+\gamma_0)(\beta_n s^n+\ldots+\beta_0).$$

Po wykonaniu mnożenia otrzymamy z obu stron wielomiany operatora s. Wielomiany te będą miały równe współczynniki na podstawie twierdzenia z paragrafu 23. Stąd wynika, że musi też być

$$(\alpha_m\xi^m+\ldots+\alpha_0)(\delta_q\xi^q+\ldots+\delta_0)=(\gamma_p\xi^p+\ldots+\gamma_0)(\beta_n\xi^n+\ldots+\beta_0).$$

Wobec (26.3) z równości tej otrzymujemy od razu (26.2).

Ćwiczenia. 1. Sprowadzić do funkcyj wykładniczych i trygonometrycznych następujące wyrażenia:

(α) $\dfrac{1}{2s^2-2s+5}$, (ε) $\dfrac{1}{s^3+s^2+s}$,

(β) $\dfrac{3s-4}{s^2-s-6}$, (η) $\dfrac{s^4}{s^2+1}$,

(γ) $\dfrac{s^3+2s-6}{s^2-s-2}$, (ϑ) $\dfrac{5s^3+3s^2+12s-12}{s^4-16}$,

(δ) $\dfrac{6s^3+4s+1}{s^4+s^2}$, (ι) $\dfrac{1}{(s^2+s+1)^2}$.

2. Wykazać, że

(α) $\dfrac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}=\{e^{\alpha t}-e^{\beta t}\}$,

(β) $\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}=\left\{\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}(\cos\beta t-\cos\alpha t)\right\}$ $(\alpha^2\neq\beta^2)$,

(γ) $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}=\left\{\dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha t-\dfrac{1}{\beta}\sin\beta t\right\}$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$,

(δ) $\dfrac{1}{s^4-\alpha^4}=\left\{\dfrac{1}{2\alpha^3}(\operatorname{sh}\alpha t-\sin\alpha t)\right\}$ $(\alpha\neq 0)$,

(ε) $\dfrac{1}{s^4+\alpha^4}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^3}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}-\operatorname{sh}\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ $(\alpha\neq 0)$,

(η) $\dfrac{s}{s^4+\alpha^4}=\left\{\dfrac{1}{\alpha^2}\sin\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}}\right\}$ $(\alpha\neq 0)$,

(ϑ) $\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}=\{\cos^3 t\}$,

(ι) $\dfrac{3s^2-1}{(s^2+1)^3}=\{\tfrac{1}{2}t^2\sin t\}$.

ROZDZIAŁ IV

Równania różniczkowe zwyczajne o współczynnikach stałych

§ 27. Ogólna metoda i przykłady

Rachunek operatorów daje wygodne sposoby rozwiązywania równań różniczkowych liniowych. Szczególnie piękne pole do zastosowań stanowią równania cząstkowe, ale także w przypadku równań zwyczajnych stosowanie operatorów daje pewne korzyści w stosunku do metod klasycznych. Nie wymaga ono stwarzania dla tych równań żadnej osobnej teorii, sprowadzając je automatycznie, zarówno w przypadku ich jednorodności jak i niejednorodności, do zwykłych równań algebraicznych.

Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe n-go rzędu

$$\alpha_n x^{(n)}+\alpha_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+\alpha_0 x=f, \tag{27.1}$$

w którym współczynniki $\alpha_n,\ldots,\alpha_0$ $(\alpha_n\neq 0)$ są stałe, f zaś jest dowolną funkcją ciągłą dla $t\geqslant 0$. Szukamy rozwiązania $x(t)$ spełniającego warunki początkowe

$$x(0)=\gamma_0,\qquad x'(0)=\gamma_1,\quad \ldots,\quad x^{(n-1)}(0)=\gamma_{n-1}.$$

Wobec wzoru ogólnego

$$x^{(n)}=s^n x-s^{n-1}x(0)-\ldots-x^{(n-1)}(0)$$

wyprowadzonego w paragrafie 22 (str. 29), równanie (27.1) można napisać w postaci

$$\alpha_n s^n x+\alpha_{n-1}s^{n-1}x+\ldots+\alpha_0 x=\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\ldots+\beta_0+f,$$

gdzie

$$\beta_\nu=\alpha_{\nu+1}\gamma_0+\alpha_{\nu-2}\gamma_1+\ldots+\alpha_n\gamma_{n-\nu-1}\qquad(\nu=0,1,\ldots,n-1).$$

Stąd znajdujemy od razu

$$x=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\beta_0+f}{\alpha_n s^n+\ldots+\alpha_0}.$$

Aby otrzymać rozwiązanie w zwykłej postaci, można rachować według schematu

$$x=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\beta_0}{\alpha_n s^n+\ldots+\alpha_0}+\frac{f}{\alpha_n s^n+\ldots+\alpha_0}$$

i stosować rozkład na ułamki proste.

Zupełnie podobnie można rozwiązywać układy równań różniczkowych o współczynnikach stałych

$$\begin{aligned}x_1'+\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=f_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_n'+\alpha_{n1}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n&=f_n.\end{aligned}$$

Zakładając, że

$$x_1(0)=\gamma_1,\quad \ldots,\quad x_n(0)=\gamma_n,$$

możemy, korzystając z ogólnego związku $x'=sx-x(0)$, nadać temu układowi postać

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}+s)x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\gamma_1+f_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \alpha_{1n}x_1+\ldots+(\alpha_{nn}+s)x_n&=\gamma_n+f_n.\end{aligned}$$

Do rozwiązania tego układu można stosować wyznaczniki lub jakąkolwiek inną klasyczną metodę rozwiązywania układów równań algebraicznych.

Przykłady.

1. Znaleźć rozwiązanie $x(t)$ równania różniczkowego

$$x'-x=(2t-1)e^{t^2}\ {}^{1)},$$

takie że $x(0)=2$.

---

[1]) Chcąc być konsekwentnym w przyjętej w paragrafie 7 symbolice, należałoby raczej pisać

$$x'-x=\{(2t-1)e^{t^2}\},$$

gdyż prawa strona równania, podobnie jak lewa, jest funkcją. Aby przyzwyczaić się jednak do poprawnego stosowania rachunku operatorów do dziedzin, gdzie zadania są podawane w dawnej, nie operatorowej symbolice, używamy jej celowo w sformułowaniu zadań, przechodząc do postaci operatorowej dopiero w trakcie rozwiązywania.

Rozwiązanie. Wobec warunku początkowego mamy $x'=sx-2$; zatem

$$sx-x=2+f,$$

gdzie

$$f=\{(2t-1)e^{t^2}\}.$$

Stąd

$$x=\frac{2+f}{s-1}=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-1}\cdot f=\{2e^t\}+\{e^t\}\{(2t-1)e^{t^2}\}=$$

$$=\left\{2e^t+\int_0^t e^{t-\tau}(2\tau-1)e^{\tau^2}d\tau\right\}=\{e^t+e^{t^2}\}.$$

2. Znaleźć rozwiązanie $x(t)$ równania różniczkowego

$$x''+\lambda^2 x=0 \qquad (\lambda\neq 0),$$

spełniające warunki początkowe

$$x(0)=\alpha, \qquad x'(0)=\beta.$$

Rozwiązanie. Jest teraz $x''=s^2x-\alpha s-\beta$ i wobec tego

$$s^2x+\lambda^2x=\alpha s+\beta;$$

stąd

$$x=\frac{\alpha s}{s^2+\lambda^2}+\frac{\beta}{s^2+\lambda^2}=\left\{\alpha\cos\lambda t+\frac{\beta}{\lambda}\sin\lambda t\right\}.$$

3. Znaleźć rozwiązanie $x(t)$ równania

$$x''-x'-6x=2,$$

spełniające warunki początkowe

$$x(0)=1, \qquad x'(0)=0.$$

Rozwiązanie. Ponieważ funkcja 2, występująca po prawej stronie, może być źródłem nieporozumienia, napiszmy jeszcze to równanie w postaci

$$\{x''(t)\}-\{x'(t)\}-6\{x(t)\}=\{2\};$$

ponieważ $\{2\}=2l=2\frac{1}{s}$, więc po uwzględnieniu warunków początkowych mamy

$$s^2x-sx-6x=s-1+2\frac{1}{s},$$

a stąd

$$x=\frac{s^2-s+2}{s(s-3)(s+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+2}=$$

$$=\left\{-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}\right\}.$$

4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x^{(8)}+2x^{(6)}-2x''-x=0,$$

spełniające warunki początkowe

$$x(0)=x''(0)=x^{(4)}(0)=x^{(6)}(0)=0,$$

$$x'(0)=2, \qquad x^{(3)}(0)=2, \qquad x^{(5)}(0)=-1, \qquad x^{(7)}(0)=11.$$

Rozwiązanie. Z postaci operatorowej równania

$$s^8x+2s^6x-2s^2x-x=2s^6+6s^4+3s^2+5$$

znajdujemy, mając na uwadze rozwiązanie przykładu 4 z paragrafu 26 (str. 34),

$$x=\frac{2s^6+6s^4+3s^2+5}{s^8+2s^6-2s^2-1}=\left\{e^t-e^{-t}-\frac{3}{8}(3-t)^2\sin t+\frac{9}{8}t\cos t\right\}.$$

5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$x'-\alpha x-\beta y=\beta e^{\alpha t},$$
$$y'+\beta x-\alpha y=0$$

przy założeniu, że

$$x(0)=0, \qquad y(0)=1.$$

Rozwiązanie.

$$sx-\alpha x-\beta y=\frac{\beta}{s-\alpha},$$

$$sy+\beta x-\alpha y=1.$$

Stosując dalej zwykłe metody rozwiązywania układów równań algebraicznych, znajdujemy

$$x=\frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad y=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)[(s-\alpha)^2+\beta^2]}$$

i dalej

$$x=\{2e^{\alpha t}\sin\beta t\},$$

$$y=\frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha}=\{2e^{\alpha t}\cos\beta t-e^{\alpha t}\}=\{e^{\alpha t}(2\cos\beta t-1)\}.$$

6. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$x'+z'-z=0,$$
$$-x'-2z'+x+y=\operatorname{th} t,$$
$$2x''+y''+z''+z=-2\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}\ {}^{1)},$$

zakładając, że

$$x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0.$$

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenie $f=\{\operatorname{th} t\}$; wtedy $\left\{-2\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}\right\}=s^2f-1$ i równania możemy napisać w postaci

$$sx+sz-z=0,$$
$$-sx-2sz+x+y=f,$$
$$2s^2x+s^2y+s^2z+z=s^2f-1.$$

Oznaczając przez D wyznacznik tego układu, mamy

$$D=\begin{vmatrix} s & 0 & s-1\\ -s+1 & 1 & -2s\\ 2s^2 & s^2 & s^2+1\end{vmatrix}=s(s+1)(s^2+1),$$

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & 0 & s-1\\ f & 1 & -2s\\ s^2f-1 & s^2 & s^2+1\end{vmatrix}=\frac{s-1}{s(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2+1},$$

$$y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} s & 0 & s-1\\ -s+1 & f & -2s\\ 2s^2 & s^2f-1 & s^2+1\end{vmatrix}=\frac{-s^2-2s+1}{s(s+1)(s^2+1)}+f=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-2\frac{1}{s^2+1}+f,$$

$$z=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} s & 0 & 0\\ -s+1 & 1 & f\\ 2s^2 & s^2 & s^2f-1\end{vmatrix}=\frac{-1}{(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

---

1) $\operatorname{th} t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ *(tangens hiperbolicus)*,

$\operatorname{sh} t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ *(sinus hiperbolicus)*,

$\operatorname{ch} t=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ *(cosinus hiperbolicus)*.

i wreszcie

$$x=\{-1+e^{-t}+\sin t\},$$
$$y=\{1-e^{-t}-2\sin t+\operatorname{th} t\},$$
$$z=\tfrac{1}{2}\{-e^{-t}-\sin t+\cos t\}.$$

Ćwiczenia. 1. Rozwiązać następujące równania przy zadanych warunkach początkowych:

(α) $x''-2\alpha x'+(\alpha^2+\beta^2)x=0$; $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

(β) $x''+4x=\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

(γ) $x'''+x'=e^{2t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

(δ) $x''+x'=t^2+2t$; $x(0)=4$, $x'(0)=-2$.

(ε) $x^{(4)}+x'''=\cos t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=(0)$, $x'''(0)=\gamma$.

(η) $4x'''-8x''-x'-3x=-8e^t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=1$.

(ϑ) $x^{(4)}+4x=t^2$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

(ι) $x^{(4)}+2\alpha^2x''+\alpha^4x=\operatorname{ch}\alpha t$; $x(0)=x'(0)=1$, $x''(0)=1-2\alpha^2$, $x'''(0)=-2\alpha^2$.

(κ) $x^{(5)}+2x'''+x'=\alpha t+\beta\sin t+\gamma\cos t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=x^{(4)}(0)=0$.

(λ) $x''-4x=\sin\frac{3}{2}t\cdot\sin\frac{1}{2}t$; $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

(Wskazówka. Zamienić iloczyn sinusów na różnicę cosinusów.)

2. Rozwiązać następujące układy równań przy zadanych warunkach początkowych:

(α) $x'-y'-2x+2y=1-2t$,
$x''+2y'+x=0$;
$x(0)=y(0)=x'(0)=0$.

(β) $x'=-y$,
$y'=2x+2y$;
$x(0)=y(0)=1$.

(γ) $x'+2y=3t$,
$y'-2x=4$;
$x(0)=2$, $y(0)=3$.

(δ) $x'+y'-y=e^t$,
$2x'+y'+2y=\cos t$;
$x(0)=y(0)=0$.

(ε) $2x'+y'-3x=0$,
$x''+y'-2y=e^{2t}$;
$x(0)=-1$, $x'(0)=1$, $y(0)=0$.

(η) $x'-x+2y=0$,
$x''-2y'=2t-\cos 2t$;
$x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

(ϑ) $x'=y-z$,
$y'=x+y$,
$z'=x+z$;
$x(0)=1$, $y(0)=2$, $z(0)=3$.

(ι) $x'=6x-72y+44z$,
$y'=-4x+40y-22z$,
$z'=-6x+57y-31z$;
$x(0)=9$, $y(0)=5$, $z(0)=7$.

ROZDZIAŁ V

Teoria obwodów elektrycznych

§ 28. Uwagi dotyczące stosowania rachunku operatorów do zagadnień fizyki i techniki

Przy stosowaniu rachunku operatorów do zagadnień fizyki lub techniki, gdzie używanie takiego czy innego znakowania uświęcone jest tradycją, pewna trudność może leżeć w poprawnym przełożeniu danych równań na symbolikę operatorową. Celem wyjaśnienia mogących się przy tym nasunąć wątpliwości przedyskutujemy dla przykładu równanie różniczkowe prądu elektrycznego

$$LI'+RI=E, \tag{28.1}$$

gdzie L, R, E i I oznaczają odpowiednio samoindukcję, opór, siłę elektromotoryczną i natężenie prądu; zakładamy przy tym, że L i R są stałe.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć natężenie I, znając L, R i E oraz wiedząc, że w chwili $t=0$ natężenie jest równe zeru

$$I(0)=0.$$

Mamy wtenczas po prostu

$$LsI+RI=E, \tag{28.2}$$

a stąd

$$I=\frac{E}{Ls+R}=E\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s+R/L}=\{E(t)\}\left\{\frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right\}$$

i ostatecznie

$$I=\left\{\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)\exp\left(-\frac{R}{L}\tau\right)d\tau\right\}. \tag{28.3}$$

Jeżeli w szczególności siła elektromotoryczna jest stała, to wzór (28.3) się uprości i całkowanie da się efektywnie wykonać

$$I=\left\{\frac{E}{L}\int_0^t \exp\left(-\frac{R}{L}\tau\right)d\tau\right\}=\left\{\frac{E}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]\right\}. \tag{28.4}$$

W tym przypadku można też od początku literę E traktować jako liczbę, podobnie jak litery L i R; chcąc wtedy rachunek przeprowadzić poprawnie, musimy zmodyfikować równanie operatorowe (28.2). Istotnie, jeżeli traktujemy L, R i E jako liczby, to precyzując dokładniej równanie wyjściowe (28.1), powinniśmy napisać

$$\{L\cdot I'(t)+R\cdot I(t)\}=\{E\};$$

wtedy w skróconej symbolice operatorowej będziemy mieli, wobec $I(0)=0$,

$$LsI+RI=E\frac{1}{s}. \tag{28.5}$$

Stąd

$$I=\frac{E}{s(Ls+R)}=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}\right)=\left\{\frac{E}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]\right\}.$$

Otrzymaliśmy inną drogą ten sam wynik co w (28.4), przy tym uniknęliśmy całkowania.

Zwróćmy uwagę na to, że w zależności od tego czy E traktujemy jako funkcję, czy też jako liczbę, różne otrzymujemy równania operatorowe (28.2) lub (28.5). Jak widać z powyższego przykładu, poprawne wprowadzenie symboliki operatorowej wymaga starannego rozróżnienia użytych liter. W przypadkach wątpliwych trudności dadzą się zawsze uniknąć, jeżeli z samego początku w równaniu pierwotnym uwidocznimy wyraźnie, gdzie występuje zmienna t. Chcąc na przykład uwzględnić zmienność siły elektromotorycznej, równanie (28.1) napiszemy najpierw w postaci

$$\{L\cdot I'(t)+R\cdot I(t)\}=\{E(t)\};$$

jeżeli zaś przyjmiemy, że siła elektromotoryczna jest stała, to możemy napisać

$$\{L\cdot I'(t)+R\cdot I(t)\}=\{E\}.$$

Wprowadzając w pierwszym przypadku oznaczenia $I=\{I(t)\}$, $I'=\{I'(t)\}$ i $E=\{E(t)\}$, mamy

$$LI'+RI=E, \tag{28.6}$$

w drugim zaś przypadku jest $\{E\}=E\frac{1}{s}$ i wobec tego

$$LI'+RI=E\frac{1}{s}. \tag{28.7}$$

Korzystając wreszcie z równości $I'=sI-I(0)=sI$, dochodzimy do równania (28.2) względnie (28.5). Przy niewielkiej stosunkowo wprawie można od razu wypisywać równania w postaci operatorowej, należy tylko wyraźnie ustalić, które litery traktujemy jako funkcje, a które jako liczby.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że równanie operatorowe (28.6) jest formalnie identyczne z równaniem wyjściowym (28.1), równanie zaś (28.7) jest od nich różne. Tłumaczy się to oczywiście przez fakt, że w równaniu (28.6) symbol E traktujemy jako funkcję, w równaniu zaś (28.7) jako liczbę.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli w równaniu (28.1) na przykład opór R jest zmienny, to nie da się ono już sprowadzić do postaci operatorowej. Uwidoczni się to od razu, gdy napiszemy wyraźnie

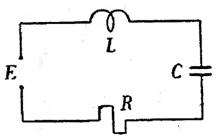
$$\{L\cdot I'(t)+R(t)\cdot I(t)\}=\{E\}.$$

Wyrażenia $\{R(t)\cdot I(t)\}$ nie możemy napisać w postaci RI, gdyż w rachunku operatorów oznaczałoby to splot $\left\{\int_0^t R(t-\tau)I(\tau)\,d\tau\right\}$. Można ogólnie udowodnić, że jeżeli współczynniki równania różniczkowego są zmienne, to przez symbolikę operatorową nie da się tego równania sprowadzić do równania algebraicznego, jak to ma miejsce w przypadku równań o współczynnikach stałych.

§ 29. Obwód elektryczny

Rozwiążemy teraz zagadnienie ogólniejsze.

Do obwodu elektrycznego o samoindukcji L, oporze R i pojemności C włączamy siłę elektromotoryczną E. Jeżeli I oznacza natężenie prądu, Q zaś ładunek na okładkach kondensatora, to spełnione są następujące równania różniczkowe



Rys. 5. Obwód elektryczny.

$$LI'+RI+\frac{Q}{C}=E,\qquad Q'=I,$$

gdzie znak $'$ oznacza różniczkowanie względem czasu.

Pisząc te równania w postaci operatorowej, mamy

$$LsI+RI+\frac{Q}{C}=E+LI(0),\qquad sQ=I+Q(0),$$

gdzie $I(0)$ i $Q(0)$ oznaczają natężenie prądu i ładunek w chwili $t=0$.

Stąd przez eliminację Q znajdujemy równanie

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I=E+LI(0)-\frac{Q(0)}{Cs}. \tag{29.1}$$

§ 30. Zerowe warunki początkowe

Załóżmy teraz, że początkowe natężenie prądu i początkowy ładunek są równe zeru. Wówczas równanie (29.9) redukuje się do postaci

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I=E. \tag{30.1}$$

Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ włączamy do obwodu stałą siłę elektromotoryczną E_0. Mamy wtedy $E=E_0/s$ i

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I=\frac{E_0}{s},$$

a stąd

$$I=\frac{E_0}{L\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}=\frac{E_0}{L[(s+\alpha)^2+\mu]},$$

gdzie

$$\alpha=\frac{R}{2L},\qquad \mu=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}. \tag{30.2}$$

Łatwo wyliczyć, że

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\mu}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\mu}\,t, & \text{gdy}\quad \mu>0\\ te^{-\alpha t}, & \text{gdy}\quad \mu=0\\ \frac{1}{\sqrt{-\mu}}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\sqrt{-\mu}\,t, & \text{gdy}\quad \mu<0\end{array}\right\}.$$

Stąd znajdujemy łatwo wzory

(I) dla $\mu>0$:

$$I(t)=\frac{E_0}{\sqrt{\mu}L}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\mu}\,t;$$

(II) dla $\mu=0$:

$$I(t)=\frac{E_0}{L}te^{-\alpha t};$$

(III) dla $\mu<0$:

$$I(t)=\frac{E_0}{\sqrt{-\mu}L}e^{-at}\operatorname{sh}\sqrt{-\mu}t.$$

Rozpatrzymy jeszcze przypadek ogólny. Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ włączamy dowolną siłę elektromotoryczną $E=\{E(t)\}$. Z równania (30.1) znajdujemy

$$I=E\cdot\frac{s}{L\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}=E\cdot\frac{s}{L[s+a)^2+\mu]}=$$
$$=E\left(\frac{s+a}{L[(s+a)^2+\mu]}-\frac{a}{L[(s+a)^2+\mu]}\right).$$

Ponieważ

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\mu}=\left\{\begin{array}{lll} e^{-at}\cos\sqrt{\mu}t, & \text{gdy} & \mu=0\\ e^{-at}, & \text{gdy} & \mu<0\\ e^{-at}\operatorname{ch}\sqrt{-\mu}t, & \text{gdy} & \mu>0\end{array}\right\},$$

więc mamy wzory

(I) dla $\mu>0$:

$$I(t)=\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)\,e^{-a\tau}\left[\cos\sqrt{\mu}\,\tau-\frac{a}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}\,\tau\right]d\tau;$$

(II) dla $\mu=0$:

$$I(t)=\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)\,(1-a\tau)\,e^{-a\tau}\,d\tau;$$

(III) dla $\mu<0$:

$$I(t)=\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)e^{-a\tau}\left[\operatorname{ch}\sqrt{-\mu}\tau-\frac{a}{\sqrt{-\mu}}\operatorname{sh}\sqrt{-\mu}\,\tau\right]d\tau.$$

§ 31. Prąd zwarcia

W poprzednim paragrafie zakładaliśmy stale, że $I(0)=0$ i $Q(0)=0$. Obecnie przyjmiemy, że $I(0)$ i $Q(0)$ są dowolne, a $E=0$. Odpowiada to założeniu, że końce obwodu zwieramy w chwili $t=0$, bez włączenia jakiejkolwiek siły elektromotorycznej. Nazwijmy prąd, który wówczas przepływa przez obwód, *prądem zwarcia* i oznaczmy go przez $\bar{I}$.

Prąd zwarcia spełnia równanie

(31.1) $$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)\bar{I}=LI(0)-\frac{Q(0)}{Cs},$$

ma więc postać

(31.2) $$\bar{I}=\frac{LI(0)-\frac{Q(0)}{Cs}}{Ls+R+\frac{1}{Cs}}.$$

Można też napisać

$$\bar{I}=\frac{LsI(0)-\frac{Q(0)}{C}}{L\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{C}\right)}=I(0)\frac{s+a}{(s+a)^2+\mu}-\frac{\delta}{(s+a)^2+\mu},$$

gdzie

$$\delta=\frac{R}{2L}I(0)+\frac{1}{LC}Q(0),$$

a a i μ są określone przez (30.2).

Wobec wzorów podanych w poprzednim paragrafie znajdujemy stąd od razu przebieg prądu zwarcia:

(I) dla $\mu>0$:

$$\bar{I}(t)=I(0)\cdot e^{-at}\cos\sqrt{\mu}t-\frac{\delta}{\sqrt{\mu}}e^{-at}\sin\sqrt{\mu}t;$$

(II) dla $\mu=0$:

$$\bar{I}(t)=\big(I(0)-\delta t\big)e^{-at};$$

(III) dla $\mu<0$:

$$\bar{I}(t)=I(0)e^{-at}\operatorname{ch}\sqrt{-\mu}t-\frac{\delta}{\sqrt{-\mu}}e^{-at}\operatorname{sh}\sqrt{-\mu}t.$$

Rachunek powyższy jest ważny przy założeniu, że $L>0$. Gdy $L=0$, $R>0$ i $C>0$, to

$$\bar{I}=-\frac{Q(0)}{CRs+1},$$

a stąd

(31.3) $$\bar{I}(t)=-\frac{Q(0)}{CR}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right).$$

Gdy obwód jest bez kondensatora, to zamiast (31.1) mamy równanie

$$(Ls+R)\bar{I}=LI(0);$$

odpowiada to założeniu $C=\infty$. W tym przypadku jest

$$\bar{I}=\frac{LI(0)}{Ls+R}$$

i

$$I(t)=I(0)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Łatwo zauważyć, że przy założeniu $R>0$ prąd zwarcia maleje do zera, jak funkcja wykładnicza, we wszystkich omówionych przypadkach. Wątpliwość może powstać tylko w przypadku (III); ale wystarczy sprawdzić, że przy $\mu<0$ jest

$$e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\sqrt{-\mu}\,t=\tfrac{1}{2}\left(e^{-(\alpha-\sqrt{-\mu})t}+e^{-(\alpha+\sqrt{-\mu})t}\right),$$

$$e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\sqrt{-\mu}\,t=\tfrac{1}{2}\left(e^{-(\alpha-\sqrt{-\mu})t}-e^{-(\alpha+\sqrt{-\mu})t}\right),$$

i że

$$\alpha-\sqrt{-\mu}=\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}>0.$$

Malenie prądu zwarcia do zera jest zrozumiałe, gdyż wewnątrz rozważanego obwodu nie ma żadnej siły elektromotorycznej, istniejący zaś prąd zużywa się stale na pokonywanie oporu.

W pewnych obliczeniach, gdy opór obwodu jest mały, przyjmuje się $R=0$. Przybliżenie to jest tylko wtedy uzasadnione, gdy przebieg prądu badamy w przeciągu krótkiego czasu. Gdy $R=0$, $L>0$ i obwód ma kondensator, to na podstawie wzoru (31.1) mamy

$$\bar{I}=\frac{sI(0)-\dfrac{Q(0)}{LC}}{s^2+\dfrac{1}{LC}} \tag{31.4}$$

i

$$\bar{I}(t)=I(0)\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}-\frac{Q(0)}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}},$$

czyli

$$\bar{I}(t)=\beta\sin\left(\gamma-\frac{t}{\sqrt{LC}}\right),$$

gdzie

$$\beta=\sqrt{I^2(0)+\frac{Q^2(0)}{LC}},\qquad \operatorname{tg}\gamma=\sqrt{LC}\,\frac{I(0)}{Q(0)}.$$

W tym przypadku prąd zwarcia jest sinusoidalny.

Gdy $R=0$, $L>0$ i obwód nie ma kondensatora, to w miejsce (31.1) mamy równanie

$$Ls\bar{I}=LI(0),$$

a stąd

$$\bar{I}=\frac{I(0)}{s},$$

czyli

$$\bar{I}(t)=I(0)$$

dla każdego $t\geqslant 0$. W tym przypadku prąd zwarcia jest stały.

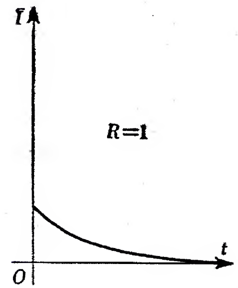
Rozpatrzmy jeszcze przypadek obwodu z kondensatorem, lecz bez oporu i samoindukcji. Wtedy równanie (31.1) formalnie upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{Cs}\bar{I}=-\frac{Q(0)}{Cs}.$$

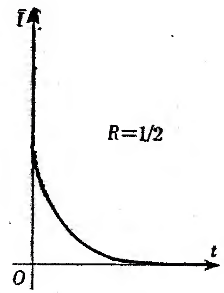
Stąd mamy

$$\bar{I}=-Q(0). \tag{31.5}$$

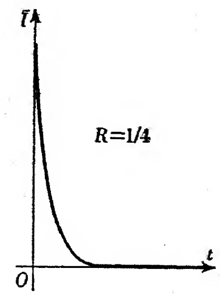
Operator $\bar{I}$ jest w tym przypadku *liczbą*. Ale i teraz można prądowi zwarcia nadać pewien sens intuicyjny. W tym celu roz-



Rys. 6 a. $R=1$.



Rys. 6 b. $R=\frac{1}{2}$.



Rys. 6 c. $R=\frac{1}{4}$.

ważamy najpierw obwód z kondensatorem i oporem; wówczas przebieg zjawiska opisany jest przez równość (31.3). Rysunki 6 a, 6 b i 6 c przedstawiają przebieg prądu zwarcia dla różnych opo-

rów, przy stałej pojemności i ładunku początkowym. Widać, że im mniejszy jest opór, tym większy jest prąd w chwili początkowej, lecz tym prędzej zanika. Tłumaczy się to przez fakt, że przy mniejszym oporze szybciej rozładowuje się kondensator. Gdy $R=0$, to mamy *zwarcie* i kondensator rozładowuje się od razu, dając w pierwszej chwili natężenie nieskończenie wielkie, które natychmiast spada do zera. W rzeczywistości takie warunki dają się zrealizować tylko w przybliżeniu, gdyż każdy obwód ma pewien, choćby minimalny opór. Tym niemniej uogólnienie pojęcia prądu zwarcia na przypadek, w którym opór czynny R jest równy zeru, daje duże korzyści rachunkowe i pozwala w obliczeniach na jednolite traktowanie wszystkich przypadków.

Ważny w zastosowaniach jest przypadek, gdy $I(0)=0$ i $Q(0)=0$; w chwili $t=0$ nie płynie żaden prąd i wszystkie kondensatory są rozładowane. Wówczas z wzoru (31.1) wynika, że prąd zwarcia jest od początku równy zeru.

Uwaga. Równanie (31.1) traci sens, gdy $C=0$. Ale ten przypadek nigdy nie zachodzi, gdyż w obwodzie z kondensatorem jest zawsze $C>0$, obwodowi zaś bez kondensatora odpowiada wartość $C=\infty$. Rola stałych obwodu elektrycznego byłaby bardziej symetryczna, gdyby zamiast pojemności kondensatora wprowadzić jej odwrotność $1/C$. Jednakże ze względów zwyczajowych pozostajemy przy oznaczeniach tradycyjnych.

§ 32. Impedancja

Korzystając z pojęcia prądu zwarcia $\bar{I}$, można równanie (32.1) zapisać w postaci

(32.1) $$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)(I-\bar{I})=E.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$Z=Ls+R+\frac{1}{Cs},$$

możemy to równanie zapisać jeszcze prościej:

(32.2) $$Z(I-\bar{I})=E.$$

Jest to podstawowe równanie obwodu elektrycznego. W przypadku, gdy prąd zwarcia jest równy zeru, równanie to upraszcza się do postaci

(32.3) $$ZI=E.$$

Operator Z będziemy nazywali *impedancją* rozważanego układu samoindukcji, oporu i pojemności. Impedancja Z charakteryzuje w zupełności dynamiczne własności układu; prąd zwarcia $\bar{I}$ charakteryzuje jego stan początkowy.

Impedancja Z jest w pewnym sensie uogólnieniem impedancji z teorii prądów sinusoidalnych, które omówimy w następnym paragrafie.

§ 33. Prądy sinusoidalne

Bardzo ważny w zastosowaniach jest przypadek, gdy napięcie dane jest przez funkcję

$$E(t)=E_1\cos\omega t-E_2\sin\omega t$$

lub w symbolice operatorowej

$$E=\frac{E_1 s-E_2\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Liczba ω nazywa się *pulsacją* napięcia.

Jeżeli założymy, że prąd zwarcia jest równy zeru, to będziemy mieli równanie

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I=\frac{E_1 s-E_2\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Wobec tego

(33.1) $$I=\frac{E_1 s-E_2\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{Ls+R+\dfrac{1}{Cs}}=\frac{I_1 s-I_2\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{As+B}{Ls^2+Rs+\dfrac{1}{C}},$$

gdzie stałe I_1, I_2, A i B można wyznaczyć zwykłym sposobem.

Wprowadzając oznaczenia

(33.2) $$I_u=\frac{I_1 s-I_2\omega}{s^2+\omega^2},\qquad I_p=\frac{As+B}{Ls^2+Rs+\dfrac{1}{C}},$$

można napisać

$$I=I_u+I_p.$$

Prąd I_p ma analogiczną postać jak prąd zwarcia (31.2), z czego wynika, że maleje szybko do zera (przy założeniu $R>0$). Po pewnym czasie ustali się prąd sinusoidalny I_u, który będziemy nazywali *prądem ustalonym*; prąd ten nie zanika, co widoczne jest od razu,

jeżeli zapiszemy go w zwykłej postaci

$$I_u(t) = I_1 \cos \omega t - I_2 \sin \omega t.$$

Prąd I_p będziemy dla odróżnienia nazywali *prądem przejściowym.*

W praktyce najczęściej chodzi tylko o znalezienie prądu ustalonego; wtedy obliczenie współczynników A i B we wzorze (33.1) staje się zbyteczne. Dla wyznaczenia I_1 i I_2 piszemy

$$I_1 s - I_2\omega + I_p \cdot (s^2+\omega^2) = \frac{E_1 s - E_2\omega}{Ls + R + \dfrac{1}{Cs}}. \tag{33.3}$$

Równość ta, będąca konsekwencją wzorów (33.1) i (33.2) pozostanie nadal prawdziwa, jeżeli zamiast s podstawimy dowolną liczbę, dla której mianownik w (33.3) będzie różny od zera (zob. § 26). W szczególności, jeżeli za s podstawimy na przykład ωi, to współczynnik przy I_p będzie równy zeru; po podzieleniu całej równości przez ωi pozostanie ostatecznie

$$I_1 + iI_2 = \frac{E_1 + iE_2}{L\omega i + R + \dfrac{1}{C\omega i}}. \tag{33.4}$$

Stąd przez porównanie części rzeczywistej i urojonej po obydwu stronach równości można łatwo wyliczyć I_1 i I_2:

$$I_1 = \frac{1}{Z_0^2}\left[E_1 R - E_2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right], \qquad I_2 = \frac{1}{Z_0^2}\left[E_1\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) + E_2 R\right],$$

gdzie

$$Z_0^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2.$$

W zastosowaniach ważniejsze jest wyznaczenie innych stałych, które omówimy niżej.

Napięcie $E(t)$ można przedstawić w postaci

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{E_2}{E_1};$$

liczbę E_0 nazywamy *amplitudą napięcia*, a φ *fazą napięcia*.

Podobnie można przedstawić natężenie $I(t)$:

$$I_u(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi),$$

gdzie

$$I_0 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{I_2}{I_1};$$

wielkość I_0 jest *amplitudą natężenia*, a ψ *fazą natężenia*.

Napięcie E i prąd I_u są przy danej frekwencji w zupełności scharakteryzowane przez swe amplitudy i fazy.

Przy powyższych oznaczeniach mamy

$$E_1 + iE_2 = E_0 e^{i\varphi}, \qquad I_1 + iI_2 = I_0 e^{i\psi};$$

można również napisać

$$L\omega i + R + \frac{1}{C\omega i} = Z_0 e^{i\theta},$$

gdzie

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}.$$

Wtenczas równanie (33.4) przyjmuje postać

$$Z_0 e^{i\theta} \cdot I_0 e^{i\psi} = E_0 e^{i\varphi};$$

stąd mamy

$$Z_0 I_0 = E_0, \qquad \theta + \psi = \varphi. \tag{33.5}$$

Wielkość Z_0 nazywa się zwykle *impedancją* lub *zawadą* rozważanego obwodu. Ponieważ poprzednio wprowadziliśmy nazwę *impedancja* w innym sensie, więc dla Z_0 używać będziemy nazwy *zawada* [1]). Wielkość θ nazywamy *przesunięciem fazy*.

Dla znalezienia amplitudy prądu trwałego wystarczy podzielić amplitudę napięcia przez zawadę. Fazę prądu ustalonego znajdujemy odejmując od fazy napięcia przesunięcie fazy.

---

[1]) Operator Z w równaniu (32.3) i liczba Z_0 w równaniu (33.5) grają podobną rolę. O ile jednak operator Z charakteryzuje wszystkie własności dynamiczne układu i ma zastosowanie dla prądów wszelkiego rodzaju, to liczba Z_0 pozwala obliczyć tylko amplitudę prądu o stałej frekwencji (gdy znamy amplitudę siły elektromotorycznej) i nie uwzględnia na przykład przesunięcia fazy. Z tych powodów *impedancję* Z można uważać za uogólnienie pojęcia *zawady* Z_0 (Carslaw-Jaeger [2], str. 29).

Zastosowanie liczb zespolonych do obliczania prądu ustalonego jest dobrze znane elektrotechnikom. Jak widzieliśmy metoda ta daje się wyprowadzić w sposób łatwy i naturalny z rachunku operatorów.

Zauważmy jeszcze, że z równym pożytkiem można by w równaniu (33.3) w miejsce s podstawiać $-\omega i$ (zamiast ωi), wówczas jednak rachunki formalne różniłyby się w drobnych szczegółach od rachunków uświęconych tradycją.

Przy obliczaniu całkowitego prądu I musimy jeszcze wyznaczyć prąd przejściowy I_p. Ze wzoru (33.3) mamy

$$(33.6)\qquad I_p=\frac{1}{(s^2+\omega^2)\left(Ls+R+\dfrac{1}{Cs}\right)}\left[E_1s-E_2\omega-(I_1s-I_2\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)\right].$$

Ale wzór (33.4) można napisać w postaci

$$E_1+iE_2=\left(L\omega i+R+\frac{1}{C\omega i}\right)(I_1+iI_2),$$

skąd przez porównanie części rzeczywistych i urojonych mamy

$$E_1=I_1R-I_2\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right),$$

$$E_2=I_1\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)+I_2R.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (33.6), znajdujemy po łatwych uproszczeniach

$$I_p=\frac{-LI_1+\dfrac{I_2}{\omega Cs}}{Ls+R+\dfrac{1}{Cs}}.$$

Prąd przejściowy jest więc identyczny z prądem zwarcia, w którym natężenie początkowe wynosi $-I_1$ i którego ładunek początkowy na kondensatorze jest równy $-\dfrac{I_2}{\omega}$.

Jeżeli ponadto w chwili $t=0$ istnieje pewien prąd początkowy $I(0)$ i ładunek $Q(0)$ na kondensatorze, to całkowity prąd I będzie się składał z trzech części:

$$I=I_u+I_p+\bar{I},$$

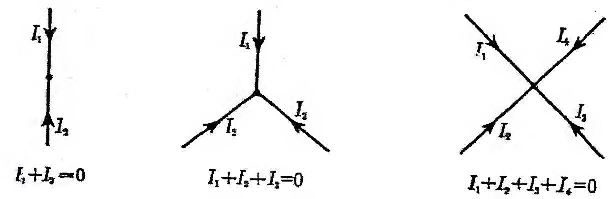
gdzie prąd $\bar{I}$ dany jest wzorem (33.2).

Ponieważ prądy I_p i $\bar{I}$ mają ten sam charakter, wystarczy obliczyć prąd ustalony I i dodać do niego prąd zwarcia odpowiadający natężeniu początkowemu $I(0)-I_1$ i ładunkowi $Q(0)-\dfrac{I_2}{\omega}$.

§ 34. Prawa Kirchhoffa

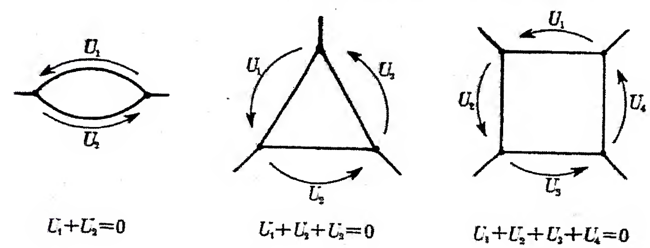
Przy układaniu równań dla prądów w sieciach elektrycznych opieramy się na prawach Kirchhoffa.

Pierwsze prawo Kirchhoffa. *W każdym punkcie sieci suma algebraiczna prądów doń dopływających jest równa zeru.*



Rys. 7. Pierwsze prawo Kirchhoffa.

Drugie prawo Kirchhoffa. *W każdym zamkniętym obwodzie sieci suma algebraiczna napięć poszczególnych odcinków jest równa zeru.*



Rys. 8. Drugie prawo Kirchhoffa.

§ 35. Mostek Wheatstone'a

Prosty przykład na zastosowanie praw Kirchhoffa stanowi *mostek Wheatstone'a*, przedstawiony na rysunku 9.

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa mamy dla węzłów B, D i F równania

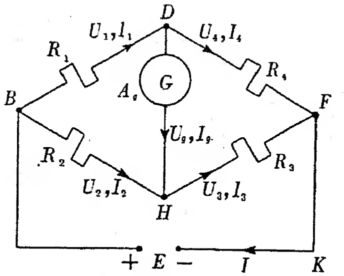
$$(35.1)\qquad I-I_1-I_2=0,\qquad I_1-I_4-I_g=0,\qquad I_3+I_4-I=0.$$

Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa mamy dla obwodów BDH, DFH i $BHFK$ równania

$$U_1+U_g-U_2=0, \qquad U_4-U_3-U_g=0, \qquad U_2+U_3-E=0. \tag{35.2}$$

Prądy zwarcia dla wszystkich odcinków[1]) z wyjątkiem DH zawierającego galwanometr są równe zeru. Mamy więc równości

$$\begin{aligned} R_1I_1&=U_1, \qquad R_2I_2=U_2,\\ R_3I_3&=U_3, \qquad R_4I_4=U_4,\\ A_g(I_g&-\bar{I}_g)=U_g, \end{aligned} \tag{35.3}$$



Rys. 9. Mostek Wheatstone'a.

gdzie A_g oznacza impedancję galwanometru G.

Podstawiając (35.3) do (35.2), otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} R_1I_1+A_g(I_g-\bar{I}_g)-R_2I_2&=0,\\ R_4I_4-R_3I_3-A_g(I_g-\bar{I}_g)&=0,\\ R_2I_2+R_3I_3-E&=0. \end{aligned} \tag{35.4}$$

Z równań (35.1) i (35.4) można wyliczyć, że

$$I_g=\frac{E(R_2R_4-R_1R_3)+A_g\bar{I}_g(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4+A_g(R_1+R_4)(R_2+R_3)}.$$

W powyższym rachunku można oczywiście pominąć równania (35.2) i (35.3) i wypisać od razu równania (35.4), co nie przedstawia żadnych trudności.

Gdy przyjmiemy, że w chwili $t=0$ nie ma w galwanometrze G żadnego ładunku i nie przechodzi przezeń żaden prąd, to będzie $\bar{I}_g=0$. Gdy zażądamy jeszcze, żeby było $I_g=0$, to otrzymamy znany warunek równowagi

$$R_1R_3-R_2R_4=0. \tag{35.5}$$

Jeżeli chodzi wyłącznie o znalezienie warunku równowagi, to cały rachunek można przeprowadzić znacznie krócej, zakładając od razu, że $I_g=0$ i $\bar{I}_g=0$.

Wtedy jest

$$I_1=I_4 \quad \text{i} \quad I_2=I_3,$$

[1]) Przez prąd zwarcia dla odcinka rozumiemy prąd, który przepłynąłby przezeń po zwarciu jego końców.

a dla obwodów BDH i DFH mamy równania

$$R_1I_1-R_2I_2=0, \qquad R_4I_1-R_3I_2=0,$$

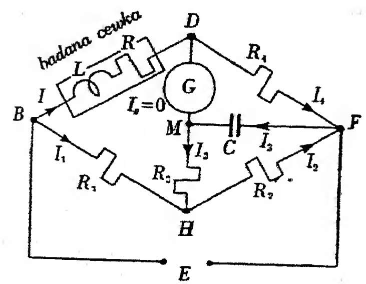
z których przez eliminację I_1 i I_2 wynika od razu równość (35.5).

§ 36. Mostek Andersona

Jako dalszy przykład zastosowania praw Kirchhoffa rozpatrzymy *mostek Andersona*. Jest to przyrząd, który pozwala mierzyć samoindukcję za pomocą znanych oporów i pojemności.

Schemat połączeń podany jest na rysunku 10. Cewkę, której samoindukcję chcemy zmierzyć, włączamy do zacisków B i D. Do zacisków B i F włączamy baterię o stałym napięciu i regulujemy opory R_1, R_2 i R_4 (w zależności od oporu R badanej cewki), tak żeby galwanometr G nie wykazywał przepływu prądu. Ponieważ przy stałym napięciu przez odcinek FM nie przepływa żaden prąd, rozważany układ działa jak mostek Wheatstone'a i mamy równość

$$R_1R_4=RR_2=0. \tag{36.1}$$



Rys. 10. Mostek Andersona.

Włączmy teraz do zacisków BF dowolną zmienną siłę elektromotoryczną i dostrójmy kondensator tak, żeby galwanometr nie wykazywał prądu. Zakładając, że w chwili włączenia $t=0$ nie było w układzie żadnych prądów ani ładunków (co można uzyskać na przykład przez chwilowe spięcie węzłów B i F przed włączeniem zmiennej siły elektromotorycznej) mamy na podstawie praw Kirchhoffa następujące równania dla węzła H i obwodów $BDMH$, DFM i FMH:

$$\begin{aligned} I_1-I_2+I_3&=0,\\ (Ls+R)I+R_3I_3-R_1I_1&=0,\\ R_4I+\frac{1}{Cs}I_3&=0,\\ \frac{1}{Cs}I_3+R_3I_3+R_2I_2&=0. \end{aligned}$$

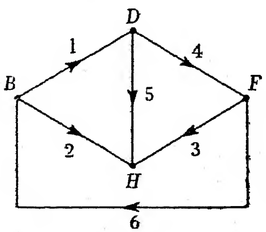
Eliminując z tych równań I, I_1, I_2, I_3 i uwzględniając związek (36.1), dochodzimy łatwo do równości

$$L = C \cdot \frac{R_4}{R_2}(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3).$$

Rachunek został przeprowadzony nie tylko dla prądów o stałej frekwencji, lecz dla zupełnie dowolnych prądów zmiennych. Stąd na przykład wynika, że nie mając pod ręką źródła prądu zmiennego, można wykonać pomiar samoindukcji za pomocą prądu stałego przez włączanie i wyłączanie go w krótkich odstępach czasu.

§ 37. Ogólne uwagi o układaniu równań dla prądów sieci

Sieć przedstawiona na rysunku 11 (odpowiadająca na przykład mostkowi Wheatstone'a) jest złożona z sześciu odcinków, które oznaczyliśmy liczbami 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Chcąc wyznaczyć prądy



Rys. 11.

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad I_4, \quad I_5, \quad \text{i} \quad I_6,$$

płynące w poszczególnych odcinkach, musimy ułożyć sześć równań.

Sieć ma cztery węzły B, D, F i H, można więc dla nich ułożyć (na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa) cztery równania

$$\begin{aligned} B: &\quad -I_1 - I_2 + I_6 = 0, \\ D: &\quad I_1 - I_4 - I_5 = 0, \\ F: &\quad -I_3 + I_4 - I_6 = 0, \\ H: &\quad I_2 + I_3 + I_5 = 0. \end{aligned}$$

Dodając do siebie wszystkie cztery równania, otrzymamy $0 = 0$. Jest to z punktu widzenia fizycznego zrozumiałe, gdyż suma prądów dopływających do węzłów musi być równa zeru, skoro z układu nie odpływają żadne prądy na zewnątrz. Stąd wynika, że każde z wypisanych równań daje się wyprowadzić z trzech pozostałych. Wobec tego jedno z nich (którekolwiek) można pominąć, tak że pozostaną tylko trzy równania.

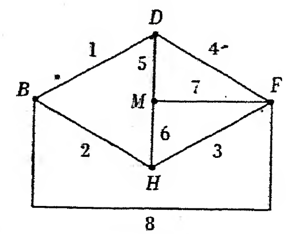
Ponadto można w sieci wyróżnić siedem obwodów: BDH, DFH, BHF, BDF, $BDFH$, $BDHF$ i $BHDF$, dla których znowu

mamy siedem równań (na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa). Cztery z nich można pominąć z podobnych powodów jak poprzednio.

W ten sposób pozostanie sześć równań, to znaczy dokładnie tyle, ile jest niewiadomych.

Rozważmy teraz bardziej skomplikowany układ (odpowiadający mostkowi Andersona) przedstawiony na rysunku 12. Mamy tu osiem odcinków i tym samym osiem różnych na ogół prądów.

Dla pięciu węzłów B, D, F, H i M mamy 5 równań, z których jedno można odrzucić. Pozostają więc cztery równania. Ponieważ jest do wyznaczenia osiem prądów, więc należy wypisać jeszcze cztery równania. Tymczasem w rozważanym układzie da się wyróżnić aż trzynaście obwodów



Rys. 12.

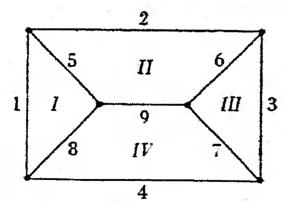
$DFHM$, DFM, FHM, BHF, BDF, $BDMH$, $BDFH$, $BDMFH$, $BDFMH$, $BHMF$, $BDMF$, $BDMHF$ i $BHMDF$.

Z obwodów tych należy wybrać cztery, ale powstaje pytanie, które?

Dla układów płaskich, to znaczy takich, w których przewody się nie krzyżują, można podać prostą wskazówkę: wystarczy wziąć obwody, wewnątrz których nie ma już żadnych przewodów. W naszym przypadku są cztery takie obwody

$$DFM, \quad FHM, \quad BDMH \quad \text{i} \quad BHF,$$

a więc dokładnie tyle, ile potrzeba równań. Nie jest to jedyne rozwiązanie, ale w każdym razie jedno z najwygodniejszych.

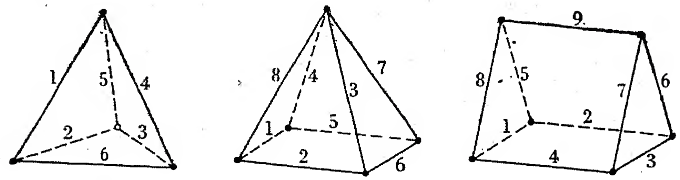


Rys. 13.

Podobnie dla układu przedstawionego na rysunku 13, mającego sześć węzłów, można wypisać równania dla którychkolwiek pięciu z tych węzłów oraz cztery równania dla obwodów I, II, III i IV. Ogólna liczba równań wynosi wtedy $5+4=9$ i jest dokładnie równa liczbie odcinków.

Opisana metoda jest związana z *twierdzeniem Eulera*, które mówi, że w każdym wielościanie liczba naroży w sumie z liczbą ścian daje liczbę krawędzi zwiększoną o 2. Istotnie, każdą sieć płaską (to zna-

czy nie mającą skrzyżowanych przewodów) można sobie wyobrazić jako wielościan, którego naroża są węzłami sieci, ściany obwodami sieci, a krawędzie jej odcinkami. Za ściany należy liczyć tylko te obwody, które nie zawierają wewnątrz żadnych odcinków i ponadto jeszcze jeden obwód, którego dotąd nie braliśmy w rachubę, zawierający wewnątrz wszystkie odcinki sieci. Obwodom przedstawionym na rysunkach 11, 12 i 13 odpowiadają wielościany: czworościan, piramida i pryzmat (rysunek 14).

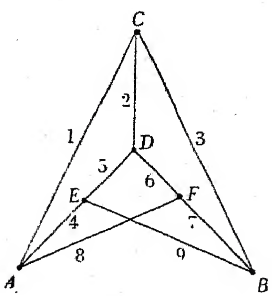


Czworościan. Piramida. Pryzmat.

Rys. 14.

Istnieją sieci, które nie dają się płasko wyrysować bez skrzyżowania przewodów. Najprostsza tego rodzaju sieć liczy dziewięć odcinków i przedstawiona jest na rysunku 15; sieci tej nie odpowiada żaden wielościan. W tym przypadku wystarczy napisać równania dla pięciu spośród sześciu istniejących węzłów oraz cztery równania dla obwodów

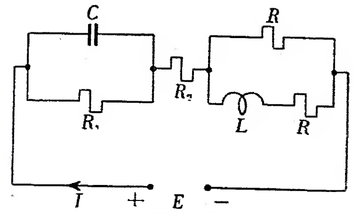
$$ACD, \quad BCD, \quad AFDE \quad \text{i} \quad BFDE.$$



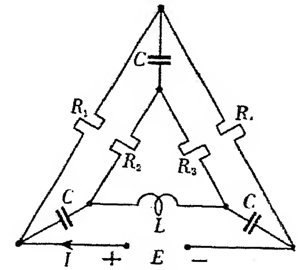
Rys. 15.

Ogólne prawidłowo ustawiania równań byłoby dla sieci nie płaskich bardziej skomplikowane. W każdym razie należy ułożyć równania dla wszystkich węzłów prócz jednego, a następnie, kierując się najlepiej intuicją, ułożyć równania dla tylu obwodów, ile wynosi liczba odcinków sieci zmniejszona o liczbę równań już wypisanych. Przy pewnej wprawie można oczywiście wprowadzać indywidualne uproszczenia rachunkowe. Można też stosować dowolne inne metody rachunkowe, stosowane przez elektrotechników, na przykład metodę prądów obwodowych (metodę Huygensa).

Ćwiczenia. 1. Wyznaczyć prąd I w układach podanych na rysunkach 16 i 17.

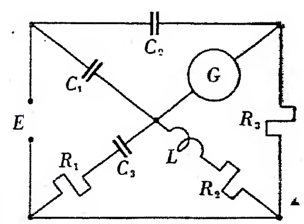


Rys. 16.

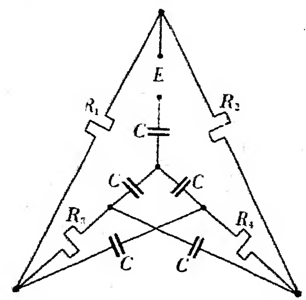


Rys. 17.

2. Znaleźć warunek na to, żeby przy dowolnym zmiennym napięciu E galwanometr G w układzie podanym na rysunku 18 nie wykazywał żadnego prądu.



Rys. 18.

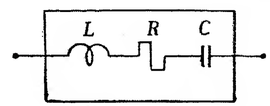


Rys. 19.

3. Ułożyć równania dla prądów w sieci podanej na rysunku 19.

§ 38. Impedancja i prąd zwarcia układów złożonych

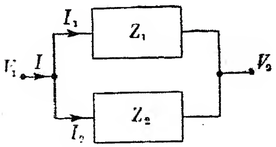
Najprostszy układ, złożony z samoindukcji L, oporu R i pojemności C połączonych z sobą szeregowo (rysunek 20), nazwijmy *układem elementarnym*; układ taki ma impedancję $Z=Ls+R+\dfrac{1}{Cs}$.



Rys. 20.
Układ elementarny.

Połączmy równolegle dwa układy elementarne o impedancjach Z_1 i Z_2 (rysunek 21). Jeżeli do końców V_1 i V_2 układu

złożonego włączymy siłę elektromotoryczną E, to będziemy mieli równania



Rys. 21.
Połączenie równoległe.

(38.1) $$I = I_1 + I_2,$$

(38.2) $$Z_1(I_1 - \bar{I}_1) = E,$$

(38.3) $$Z_2(I_2 - \bar{I}_2) = E,$$

gdzie $\bar{I}_1$ i $\bar{I}_2$ oznaczają prądy zwarcia w poszczególnych układach.

Mnożąc równanie (38.2) przez $1/Z_1$ i dodając do niego równanie (38.3) pomnożone przez $1/Z_2$, otrzymamy wobec (38.1) równość

(38.4) $$I - (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) E.$$

Wprowadzając operatory Z i $\bar{I}$, zdefiniowane wzorami

(38.5) $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \qquad \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2,$$

można równość (33.4) zapisać w postaci

$$Z(I - \bar{I}) = E.$$

Wzór ten jest identyczny pod względem formalnym z wzorem (32.2). Jest więc rzeczą naturalną nazwać operator Z *impedancją*, $\bar{I}$ zaś *prądem zwarcia* dla połączenia podanego na rysunku 21. Wzory (38.5) pozwalają efektywnie wyrachować Z i $\bar{I}$; jeżeli mianowicie napiszemy

$$Z_1 = L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s}, \qquad Z_2 = L_2 s + R_2 + \frac{1}{C_2 s},$$

to będziemy mieli

(38.6) $$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\left(L_1 s^2 + R_1 s + \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2 s^2 + R_2 s + \frac{1}{C_2}\right)}{s\left[\left(L_1 s^2 + R_1 s + \frac{1}{C_1}\right) + \left(L_2 s^2 + R_2 s + \frac{1}{C_2}\right)\right]};$$

znając początkowe natężenia $I_1(0)$ i $I_2(0)$ w poszczególnych układach elementarnych oraz początkowe ładunki $Q_1(0)$ i $Q_2(0)$ na ich

kondensatorach, mamy

$$\bar{I}_1 = \frac{L_1 I_1(0) - \frac{Q_1(0)}{C_1 s}}{L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{L_2 I_2(0) - \frac{Q_2(0)}{C_2 s}}{L_2 s + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}$$

i wobec tego

$$\bar{I} = \frac{L_1 I_1(0) s - \frac{Q_1(0)}{C_1}}{L_1 s^2 + R_1 s + \frac{1}{C_1}} + \frac{L_2 I_2(0) s - \frac{Q_2(0)}{C_2}}{L_2 s^2 + R_2 s + \frac{1}{C_2}}.$$

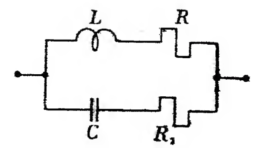
Z wzoru (38.6) wynika, że układ przedstawiony na rysunku 21 można zastąpić przez równoważny mu układ elementarny tylko wtedy, gdy iloczyn trójmianów

(38.7) $$L_1 s^2 + R_1 s + \frac{1}{C_1} \quad \text{i} \quad L_2 s^2 + R_2 s + \frac{1}{C_2}$$

jest podzielny bez reszty przez ich sumę.

Przykład. Jeżeli przez Z oznaczymy impedancję układu podanego na rysunku 22, to będziemy mieli

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Ls + R} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cs}}.$$



Rys. 22.

Stąd

$$Z = \frac{LR_1 s^2 + \left(\frac{L}{C} + RR_1\right)s + \frac{R}{C}}{Ls^2 + (R + R_1)s + \frac{1}{C}}.$$

Licznik będzie wtedy i tylko wtedy podzielny przez mianownik, gdy ich współczynniki będą proporcjonalne:

$$\frac{LR_1}{L} = \frac{\frac{L}{C} + RR_1}{R + R_1} = \frac{R}{1}.$$

Z warunku tego znajdujemy łatwo

$$R_1 = R, \qquad L = CR^2.$$

Gdy związki te zachodzą, to wtedy jest $Z = R$ i rozważany układ działa jak czysty opór omowy.

Połączmy teraz szeregowo dwa układy elementarne (rysunek 23) i do końców V_1 i V_2 włączmy siłę elektromotoryczną E. Jeżeli $\bar{I}_1$ i $\bar{I}_2$ są prądami zwarcia poszczególnych układów elementarnych, to dla całości będziemy mieli równanie

Rys. 23. Połączenia szeregowe.

$$Z_1(I-\bar{I}_1)+Z_2(I-\bar{I}_2)=E$$

czyli

(38.8) $$(Z_1+Z_2)\left(I-\frac{Z_1\bar{I}_1+Z_2\bar{I}_2}{Z_1+Z_2}\right)=E.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$Z=Z_1+Z_2, \qquad \bar{I}=\frac{Z_1\bar{I}_1+Z_2\bar{I}_2}{Z_1+Z_2}$$

możemy napisać

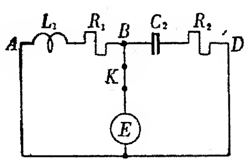
$$Z(I-\bar{I})=E.$$

W tym przypadku impedancja układu złożonego jest sumą impedancyj poszczególnych układów elementarnych.

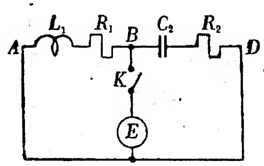
Jeżeli prądy początkowe w tych układach mają wartości $I_1(0)$ i $I_2(0)$ a ładunki początkowe $Q_1(0)$ i $Q_2(0)$, to wzór na prąd zwarcia można napisać w postaci

(38.9) $$\bar{I}=\frac{L_1I_1(0)+L_2I_2(0)-\frac{1}{s}\left(\frac{Q_1(0)}{C_1}+\frac{Q_2(0)}{C_2}\right)}{Z}.$$

P r z y k ł a d. Prąd stały $E=E_0/s$ jest włączony do układu podanego na rysunku 24 a. Po pewnym czasie w odcinkach AB i BD



Rys. 24 a.



Rys. 24 b.

ustalą się prądy

$$I_1(0)=\frac{E_0}{R_1}, \qquad I_2(0)=0,$$

na kondensatorze zaś powstanie ładunek

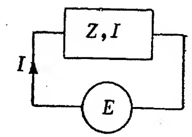
$$Q_2(0)=E_0C_2.$$

Po ustaleniu się prądów przerywamy w chwili $t=0$ połączenie w punkcie K (rysunek 24 b); wówczas w obwodzie popłynie prąd, który zgodnie z wzorem (38.9) ma postać

$$\bar{I}=\frac{\frac{E_0L_1}{R_1}-\frac{E_0}{s}}{L_1s+(R_1+R_2)+\frac{1}{C_2s}}=\frac{E_0}{R_1}\cdot\frac{L_1s-R_1}{L_1s^2+(R_1+R_2)s+\frac{1}{C_2}}.$$

Ogólnie powiemy, że dana sieć, do której są dwa doprowadzenia, ma *impedancję* Z i *prąd zwarcia* $\bar{I}$, jeżeli po włączeniu siły elektromotorycznej E (rysunek 25) przepływa prąd I, spełniający równanie

(38.10) $$Z(I-\bar{I})=E.$$

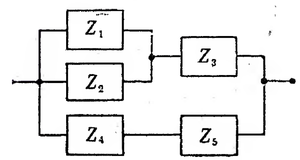


Rys. 25.

Jeżeli sieć jest bardzo skomplikowana, to również jej impedancja i prąd zwarcia mogą być operatorami bardzo skomplikowanymi. Gdy w chwili $t=0$ w żadnym odcinku sieci nie płynie prąd i żaden jej kondensator nie jest naładowany, to oczywiście prąd zwarcia $\bar{I}$ jest wtedy równy zeru i w miejsce równania (38.10) będziemy mieli

$$ZI=E.$$

Jeżeli znamy impedancję i prąd zwarcia, to znamy całkowicie wszystkie własności dynamiczne rozważanej sieci oraz jej stan początkowy i możemy zawsze przewidzieć jak będzie się ona jako całość zachowywała, choćbyśmy nie znali szczegółów jej wewnętrznej budowy.



Rys. 26.

P r z y k ł a d. Znaleźć impedancję sieci przedstawionej na rysunku 26, znając impedancje poszczególnych jej odcinków.

Dla połączenia równoległego układów 1 i 2 mamy impedancję

$$\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2},$$

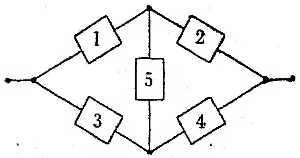
połączenie szeregowe z układem 3 daje impedancję

$$\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}+Z_3.$$

Układy 1, 2 i 3 wzięte jako całość są połączone równolegle z układami 4 i 5, dającymi łącznie impedancję Z_4+Z_5.

Stąd wynika, że impedancja całej sieci będzie miała postać

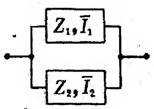
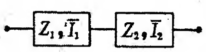
$$Z=\frac{\left(\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\right)(Z_4+Z_5)}{\frac{Z_1Z_2}{Z_2+Z_1}+Z_3+Z_4+Z_5}=\frac{[Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)\,Z_3]\,(Z_4+Z_5)}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)\,(Z_3+Z_4+Z_5)}.$$



Rys. 27.

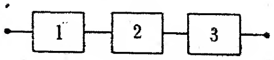
Rysunek 27 przedstawia sieć, która nie jest kombinacją połączeń szeregowych i równoległych. Dla znalezienia impedancji i prądu zwarcia dla takiej sieci musimy wyjść wprost z praw Kirchhoffa.

Ponieważ jednak połączenia równoległe i szeregowe są szczególnie ważne, zestawiamy je w poniższej tabelce. Należy zauważyć, że wzory w tej tabelce są ważne przy dowolnych impedancjach, a nie tylko dla układów elementarnych.

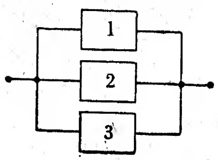
	$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$	$\bar{I}=\bar{I}_1+\bar{I}_2$
	$Z=Z_1+Z_2$	$Z\bar{I}=Z_1\bar{I}_1+Z_2\bar{I}_2$

Rys. 28.

Ćwiczenia. 1. Znaleźć impedancje i prądy zwarcia dla połączeń podanych na rysunkach 29 i 30, znając impedancje i prądy zwarcia poszczególnych elementów.

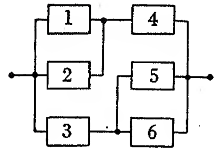


Rys. 29.

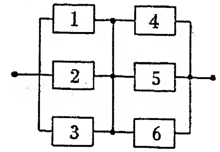


Rys. 30.

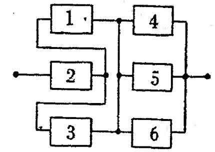
2. Znaleźć impedancje sieci podanych na rysunkach 31, 32 i 33, znając impedancje poszczególnych elementów.



Rys. 31.



Rys. 32.



Rys. 33.

3. Znaleźć impedancję sieci, podanej na rysunku 27.

4. Podać schemat, który miałby impedancję

$$Z=\frac{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}{s\,(2s+5)}.$$

Czy rozwiązanie jest jedyne?

§ 39. Przypadek siły elektromotorycznej sinusoidalnej

Gdy siła elektromotoryczna jest sinusoidalna

$$E=\frac{E_1s-E_2\omega}{s^2+\omega^2},$$

to równanie (38.10) ma postać

$$Z(s)\,(I-\bar{I})=\frac{E_1s-E_2\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Impedancja $Z=Z(s)$ jest wyrażeniem wymiernym operatora s; uwidocznienie tego operatora w równaniu będzie potrzebne w dalszych rachunkach. Mamy mianowicie

(39.1) $$I=\frac{E_1s-E_2\omega}{(s^2+\omega^2)\,Z(s)}+\bar{I},$$

a stąd

(39.2) $$I=I_u+I_p+\bar{I},$$

gdzie $I_u=\frac{I_1s-I_2\omega}{s^2+\omega^2}$, I_p zaś jest pewnym wyrażeniem wymiernym operatora s, o którym zakładamy, że w mianowniku nie ma czynników kształtu $s^2+\omega^2$.

Dla znalezienia prądu ustalonego I_u zastosujemy tę samą metodę co w paragrafie 33. Ze wzorów (39.1) i (39.2) mamy

$$I_1 s + I_2 \omega + (I_p + \bar{I})(s^2+\omega^2) = \frac{E_1 s + E_2 \omega}{Z(s)}.$$

Jeżeli w tej równości zamiast operatora s podstawimy liczbę ωi, to będziemy mieli (po podzieleniu przez $-\omega i$)

$$I_1 + iI_2 = \frac{E_1 + iE_2}{Z(\omega i)}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$E_1 + iE_2 = E_0 e^{i\varphi}, \qquad I_1 + iI_2 = I_0 e^{i\psi}, \qquad Z(\omega i) = Z_0 e^{i\theta},$$

mamy związek

$$Z_0 e^{i\theta} \cdot I_0 e^{i\psi} = E_0 e^{i\varphi}.$$

Rachunek ten jest uogólnieniem rachunku przeprowadzonego w paragrafie 33. Zawada Z_0 jest nadal równa modułowi liczby zespolonej, którą otrzymujemy z impedancji, zastępując operator s przez liczbę ωi:

$$Z_0 = |Z(\omega i)|;$$

przesunięcie fazy jest równe argumentowi tej liczby

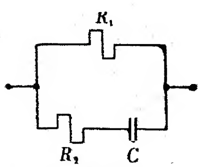
$$\theta = \arg Z(\omega i).$$

Uwaga. W rozumowaniu powyższym zakładaliśmy, że w mianownikach wyrażenia wymiernego, odpowiadającego prądowi I_p, nie ma czynników $s^2+\omega^2$. Założenie to jest usprawiedliwione, o ile przyjmiemy, że we wszystkich obwodach rozważanej sieci istnieją pewne, choćby minimalne opory. Ta sama uwaga dotyczy wyrażenia wymiernego, odpowiadającego prądowi zwarcia $\bar{I}$.

Przykład. Znaleźć prąd ustalony, który otrzymuje się z napięcia sinusoidalnego o amplitudzie E_0 i fazie φ, włączonego do układu, podanego na rysunku 34.

Impedancja Z tego układu spełnia związek

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cs}};$$



Rys. 34.

wobec tego jest

$$Z = \frac{R_1(R_2 Cs + 1)}{(R_1+R_2)Cs + 1}.$$

Stąd mamy zawadę

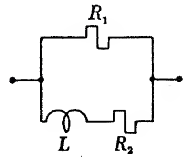
$$Z_0 = \left|\frac{R_1(R_2 C\omega i + 1)}{(R_1+R_2)C\omega i + 1}\right| = R_1 \sqrt{\frac{R_2^2 C^2\omega^2 + 1}{(R_1+R_2)^2 C^2\omega^2 + 1}}$$

oraz przesunięcie fazy

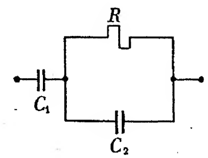
$$\theta = \arg \frac{R_1(R_2 C\omega i + 1)}{(R_1+R_2)C\omega i + 1} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{R_1 C\omega}{R_2(R_1+R_2)C^2\omega^2 + 1}.$$

Szukany prąd ma amplitudę natężenia $I_0 = \frac{E_0}{Z_0}$ i fazę $\psi = \varphi - \theta$.

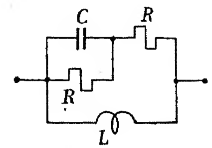
Ćwiczenie. Znaleźć prądy ustalone, które otrzymuje się z napięcia sinusoidalnego o amplitudzie E_0 i fazie φ, włączonego do układów podanych na rysunkach 35, 36 i 37.



Rys. 35.



Rys. 36.



Rys. 37.

§ 40. Impuls napięcia i jego zastosowanie przy pomiarach impedancji

Impulsem napięcia będziemy nazywali napięcie $E = \{E(t)\}$ o stałym znaku, trwające przez krótką chwilę i zanikające całkowicie. Jeżeli przedział $0 < t < \varepsilon$ jest czasem trwania impulsu, to $E(t) = 0$ dla $t > \varepsilon$ [1]); całkę

$$\acute{E} = \int_0^\varepsilon E(t)\,dt$$

nazwiemy *wielkością* impulsu.

Jeżeli $J = \{J(t)\}$ jest dowolną funkcją o pochodnej ciągłej, to dla $t > \varepsilon$ mamy na podstawie twierdzeń o wartości średniej

$$\int_0^t J(t-\tau)E(\tau)\,d\tau = \int_0^\varepsilon J(t-\tau)E(\tau)\,d\tau = \acute{E}J(\xi_1) = \acute{E}J(t) - \varepsilon\acute{E}J'(\xi),$$

gdzie $t - \varepsilon < \xi_1 < \xi < t$.

[1]) W paragrafie 13 części II omówimy również impulsy dowolnie przesunięte w czasie.

Stąd widać, że gdy ε maleje do zera, a wielkość $\acute{E}$ impulsu jest stale ta sama, to w granicy splot $\int_0^t J(t-\tau)E(\tau)\,d\tau$ dąży do iloczynu $\acute{E}J(t)$. Wskutek tego w rachunkach przybliżonych można zawsze EJ zastąpić przez $\acute{E}J$, gdzie wartość $\acute{E}$ jest traktowana jako liczba; błąd przy tym popełniony jest bezwzględnie mniejszy od $\varepsilon\acute{E}M$, gdzie M oznacza maksimum bezwzględnej wartości pochodnej $J'(t)$. Im krótszy jest czas ε, tym mniejszy jest błąd.

Samą liczbę $\acute{E}$ można intuicyjnie pojmować jako *idealny impuls*, w którym początkowe napięcie wynosi $\acute{E}\cdot\infty$, a w następnej chwili od razu spada do zera. Pojęcie idealnego impulsu nie nadaje się do rachunków zwykłej analizy, natomiast doskonale daje się uchwycić w rachunku operatorowym, gdzie impulsowi idealnemu odpowiada operator liczbowy, czyli po prostu liczba (równa wielkości impulsu). Takie ujęcie daje duże korzyści rachunkowe, pozwala bowiem abstrahować od nieistotnych w pewnych zagadnieniach wielkości, jak na przykład od czasu trwania ε impulsu i od jego kształtu w przedziale $0<t<\varepsilon$.

Odwrotność impedancji jest, z wyłączeniem pewnych wyjątkowych przypadków, funkcją zmiennej t; na przykład dla impedancji $Z=Ls+R$ mamy

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Ls+R}=\left\{\frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right\}.$$

Jeżeli do układu o impedancji Z i prądzie zwarcia $\bar{I}=0$ włączymy impuls napięcia o wartości $\acute{E}$, to otrzymamy prąd

$$I=\frac{\acute{E}}{Z};$$

z równości tej mamy

$$Z=\frac{\acute{E}}{I}.$$

Stąd wynika, że impedancję układu można znaleźć doświadczalnie, nie wchodząc w szczegóły budowy układu, przez zmierzenie prądu powstałego pod wpływem impulsu $\acute{E}$. (Prąd zwarcia $\bar{I}$ można zawsze sprowadzić do zera przez zwarcie końcówek danego układu.)

Nazwijmy *prądem jednostkowym* danego układu prąd J, który odpowiada impulsowi o wartości 1. Jest więc

$$J=\frac{1}{Z};$$

prąd jednostkowy jest odwrotnością impedancji.

Znając prąd jednostkowy, możemy przewidzieć przebieg prądu przy dowolnie zadanym napięciu E. W tym celu wystarczy utworzyć splot prądu jednostkowego z danym napięciem:

$$I=JE;$$

jest to zupełnie oczywiste wobec faktu, że prąd jednostkowy jest odwrotnością impedancji.

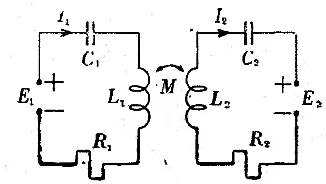
Zamiast mierzyć prąd jednostkowy, można też włączyć do układu dowolne napięcie stałe $E=\frac{E_0}{s}$. Wówczas mamy $I=\frac{E_0}{sZ}$ i wobec tego

$$J=\frac{1}{Z}=\frac{sI}{E_0}.$$

Uwaga. Prąd jednostkowy odpowiada impulsowi idealnemu, wskutek tego praktyczny jego pomiar będzie zawsze obarczony pewnym błędem. Granic tego błędu nie można wyznaczyć teoretycznie, musielibyśmy bowiem znać pochodną prądu jednostkowego, który właśnie mierzymy. Błędnego koła można uniknąć, zmniejszając stopniowo czas trwania impulsu (z zachowaniem jego wartości), tak długo aż mierzony prąd przestanie ulegać zmianie. Wówczas błąd teoretyczny będzie się mieścił w granicach błędu pomiaru.

§ 41. Sprzężenia indukcyjne

Równanie (32.2) jest ważne tylko wtedy, gdy na układ nie działają żadne zewnętrzne wpływy indukcyjne. Jeżeli natomiast rozważamy dwa układy sprzężone ze sobą indukcyjnie (rysunek 38), to w odpowiednich równaniach należy do sił elektromotorycznych E_1 i E_2 dodać wyrażenia MI'_2 i MI'_1, gdzie M jest współczynnikiem indukcji wzajemnej układów.



Rys. 38. Obwody sprzężone indukcyjnie.

Ponieważ $I_2' = sI_2 - I_2(0)$ i $I_1' = sI_1 - I_1(0)$, więc będziemy mieli równania

$$(41.1)\qquad \begin{aligned} Z_1(I_1 - \bar{I}_1) - MsI_2 &= E_1 - MI_2(0), \\ -MsI_1 + Z_2(I_2 - \bar{I}_2) &= -E_2 - MI_1(0), \end{aligned}$$

gdzie

$$(41.2)\qquad Z_1 = L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s}, \qquad Z_2 = L_2 s + R_2 + \frac{1}{C_2 s},$$

$$Z_1 \bar{I}_1 = L_1 I_1(0) - \frac{Q_1(0)}{C_1 s}, \qquad Z_2 \bar{I}_2 = L_2 I_2(0) - \frac{Q_2(0)}{C_2 s}.$$

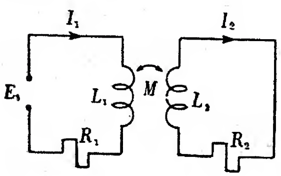
W przypadku, gdy $I_1(0) = I_2(0) = 0$ i $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$, równania (41.1) upraszczają się do postaci

$$(41.3)\qquad \begin{aligned} Z_1 I_1 - MsI_2 &= E_1, \\ -MsI_1 + Z_2 I_2 &= -E_2. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ (41.3), będziemy mieli

$$I_1 = \frac{E_1 Z_2 - E_2 Ms}{Z_1 Z_2 - M^2 s^2}, \qquad I_2 = \frac{E_1 Ms - E_2 Z_1}{Z_1 Z_2 - M^2 s^2}.$$

Po wstawieniu wartości (41.2) i pomnożeniu liczników i mianowników przez s^2, natężenia I_1 i I_2 będą się wyrażały jako ilorazy wielomianów operatora s. Przejście do zwykłej, nie operatorowej postaci nie przedstawia teoretycznie żadnych trudności, ale rozbicie mianowników na czynniki wymaga rozwiązania równania algebraicznego czwartego stopnia.



Rys. 39.

Zadanie upraszcza się w szczególnym przypadku, gdy obydwa rozważane obwody są bez kondensatorów. Obliczmy dla przykładu prąd I_2 przy założeniu, że siła elektromotoryczna E_1 jest stała, drugi zaś obwód jest zwarty bez siły elektromotorycznej (rysunek 39):

$$E_1 = \frac{E_0}{s}, \qquad E_2 = 0.$$

Wtedy mamy

$$Z_1 = L_1 s + R_1 \quad \text{i} \quad Z_2 = L_2 s + R_2$$

i wobec tego

$$I_2 = \frac{E_0 M}{(L_1 s + R_1)(L_2 s + R_2) - M^2 s^2} = \frac{E_0 M}{(L_1 L_2 - M^2)(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right),$$

gdzie λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania

$$(L_1 \lambda + R_1)(L_2 \lambda + R_2) - M^2 \lambda^2 = 0.$$

Pisząc to równanie w postaci

$$(L_1 L_2 - M^2)\lambda^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)\lambda + R_1 R_2 = 0$$

widzimy, że obydwa pierwiastki są rzeczywiste i ujemne, gdyż wyróżnik jest dodatni (przy założeniu $M > 0$, $R_1 > 0$ i $R_2 > 0$):

$$(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2) R_1 R_2 = (L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 M^2 R_1 R_2 > 0.$$

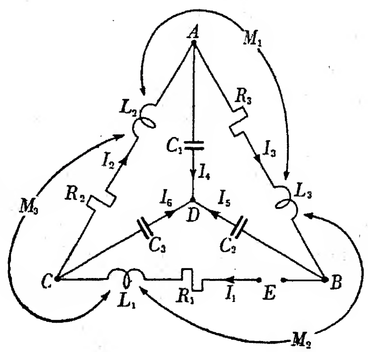
Ostatecznie więc mamy

$$I_2(t) = \frac{-E_0 M}{(L_1 L_2 - M^2)(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

W sieci elektrycznej poszczególne części mogą być ze sobą w różny sposób powiązane przez sprzężenia indukcyjne. Weźmy na przykład pod uwagę sieć przedstawioną na rysunku 40. Są tu trzy sprzężenia indukcyjne, których współczynniki oznaczyliśmy literami M_1, M_2 i M_3.

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa mamy dla węzłów A, B i C równania

$$\begin{aligned} I_2 - I_3 - I_4 &= 0, \\ I_3 - I_1 - I_5 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_6 &= 0. \end{aligned}$$



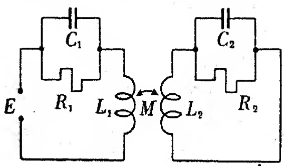
Rys. 40.

Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa po uwzględnieniu sprzężeń indukcyjnych mamy dla obwodów BCD, DAC i ABD równania

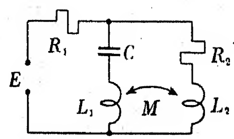
$$(L_1s+R_1)(I_1-\bar{I}_1)+M_3sI_2+M_2sI_3+\frac{1}{C_3s}(I_6-\bar{I}_6)-\frac{1}{C_2s}(I_5-\bar{I}_5)=$$
$$=E+M_3I_2(0)+M_2I_3(0),$$
$$(L_2s+R_2)(I_2-\bar{I}_2)+M_1sI_3+M_3sI_1+\frac{1}{C_1s}(I_4-\bar{I}_4)-\frac{1}{C_3s}(I_6-\bar{I}_6)=$$
$$=M_1I_3(0)+M_3I_1(0),$$
$$(L_3s+R_3)(I_3-\bar{I}_3)+M_2sI_1+M_1sI_2+\frac{1}{C_2s}(I_5-\bar{I}_5)-\frac{1}{C_1s}(I_4-\bar{I}_4)=$$
$$=M_2I_1(0)+M_1I_2(0).$$

Rozwiązanie tych sześciu równań byłoby oczywiście żmudną i nieciekawą pracą; przykład podaliśmy jedynie w celu zilustrowania sposobu układania równań w przypadku istnienia kilku sprzężeń indukcyjnych.

Ćwiczenie. Znaleźć prądy w schematach podanych na rysunkach 41 i 42, zakładając, że warunki początkowe są zerowe.



Rys. 41.



Rys. 42.

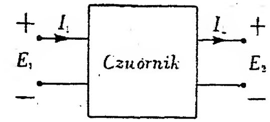
§ 42. Czwórniki

Przykładem *czwórnika* jest schemat podany na rysunku 38. Mamy tu dwa przewody wejściowe, do których jest włączone napięcie E_1, i dwa przewody wyjściowe, do których jest włączone napięcie E_2. O ile przyjmiemy, że warunki początkowe są zerowe, to własności tego czwórnika są scharakteryzowane równaniami (41.3). Rozwiązując te równania względem E_1 i I_1, mamy

$$E_1=\frac{Z_1}{Ms}E_2+\left(\frac{Z_1Z_2}{Ms}-Ms\right)I_2,$$
$$I_1=\frac{1}{Ms}E_2+\frac{Z_2}{Ms}I_2.$$

Ogólnie *czwórnikiem* nazywamy każdy układ elektryczny, zaopatrzony w dwa przewody wejściowe i dwa przewody wyjściowe (rysunek 43), który transformuje E_1, I_1 na E_2, I_2 według wzorów

$$E_1=A_{11}E_2+A_{12}I_2,\qquad (42.1)$$
$$I_1=A_{21}E_2+A_{22}I_2,$$



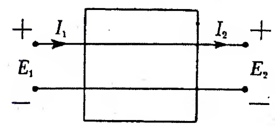
Rys. 43.

gdzie A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} są pewnymi operatorami.

Każdy czwórnik jest scharakteryzowany przez *macierz*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Najprostszym czwórnikiem jest *bezpośrednie połączenie* przewodów (rysunek 44). W tym przypadku jest



Rys. 44.

$$E_1=E_2+0\cdot I_2,\qquad I_1=0\cdot E_1+I_2.$$

wobec tego czwórnikowi temu odpowiada macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

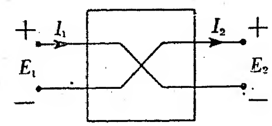
Macierz ta nazywa się *macierzą jednostkową*; charakteryzuje ona czwórnik, który nie powoduje zmiany ani napięcia ani natężenia.

Innym czwórnikiem jest *skrzyżowanie* przewodów (rysunek 45), dla którego mamy równania

$$E_1=-E_2+0\cdot I_2,\qquad I_1=0\cdot E_2-I_2.$$

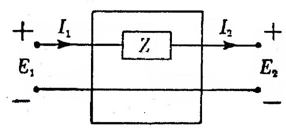
Macierz tego czwórnika ma postać

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

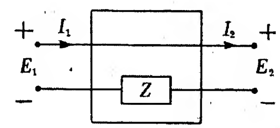


Rys. 45.

Ważny typ czwórników przedstawiają rysunki 46 i 47. Czwórniki te polegają na tym, że w jeden z przewodów włączony jest



Rys. 46.



Rys. 47.

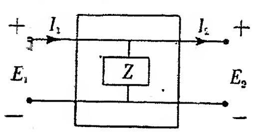
układ o dowolnej impedancji Z. W obydwu przypadkach mamy (przy zerowych warunkach początkowych) równania

$$E_1 = E_2 + ZI_2,$$
$$I_1 = 0 \cdot E_2 + I_2;$$

w konsekwencji czwórnikom tym odpowiada macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inny ważny typ czwórnika przedstawia rysunek 48. Układ o impedancji Z został tutaj włączony pomiędzy dwa równoległe przewodniki. W tym przypadku mamy równania (przy zerowych warunkach początkowych)



Rys. 48.

$$E_1 = E_2,$$
$$(I_1 - I_2)\, Z = E_1.$$

Stąd mamy związki

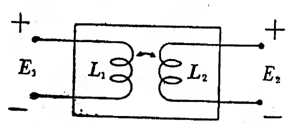
$$E_1 = E_2 + 0 \cdot I_2,$$
$$I_1 = \frac{E_2}{Z} + I_2$$

i macierz czwórnika

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla czwórnika, będącego prostym sprzężeniem indukcyjnym (rysunek 49), mamy równania

$$L_1 s I_1 - M s I_2 = E_1,$$
$$-M s I_1 + L_2 s I_2 = -E_2,$$



Rys. 49.

a stąd

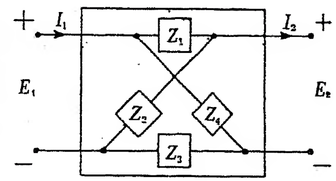
$$E_1 = \frac{L_1}{M} E_2 + \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} s I_2,$$
$$I_1 = \frac{1}{Ms} E_2 + \frac{L_2}{M} I_2.$$

Sprzężeniu indukcyjnemu odpowiada więc macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1}{M} & \frac{(L_1 L_2 - M^2)\, s}{M} \\ \frac{1}{Ms} & \frac{L_2}{M} \end{pmatrix}.$$

Na końcu książki zestawiamy w tabelce najważniejsze z prostych czwórników.

Ćwiczenia. 1. Wyznacznik $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$ nazywamy wyznacznikiem macierzy $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Sprawdzić, że wyznaczniki wszystkich omówionych wyżej macierzy są równe 1.



Rys. 50.

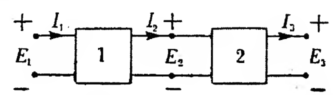
2. Wykazać, że czwórnikowi przedstawionemu na rysunku 50 odpowiada macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}, & \frac{(Z_1+Z_2)\, Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 (Z_3+Z_4)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}, & \frac{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3} \end{pmatrix}.$$

Sprawdzić, że wyznacznik tej macierzy jest równy 1.

§ 43. Łączenie czwórników

Dwa czwórniki łączymy ze sobą jak na rysunku 51. Jeżeli



Rys. 51. Połączenie dwóch czwórników.

(38.1) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

są macierzami tych czwórników, to mamy związki

$$E_1 = A_{11} E_2 + A_{12} I_2, \qquad E_2 = B_{11} E_3 + B_{12} I_3,$$
$$I_1 = A_{21} E_2 + A_{22} I_2, \qquad I_2 = B_{21} E_3 + B_{22} I_3.$$

Eliminując z tych równań E_2 i I_2, znajdujemy związki

$$E_1 = (A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}) E_3 + (A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22}) I_3,$$
$$I_1 = (A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21}) E_3 + (A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22}) I_3.$$

Widać stąd, że układ obydwu czwórników możemy uważać za nowy czwórnik o macierzy

(43.2) $$\begin{pmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}, & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21}, & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{pmatrix}.$$

Macierz (43.2) nazywamy *iloczynem* macierzy (43.1) i piszemy

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}, & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}, & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z tym wzorem mnożenie dwóch macierzy wykonujemy w następujący sposób:

I. Elementy pierwszego wiersza pierwszej macierzy mnożymy przez elementy pierwszej kolumny drugiej macierzy i sumę wpisujemy w lewym górnym rogu macierzy iloczynowej;

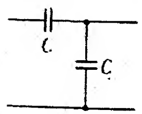
II. Elementy pierwszego wiersza pierwszej macierzy mnożymy przez elementy drugiej kolumny drugiej macierzy i sumę wpisujemy w prawym górnym rogu macierzy iloczynowej;

III. Elementy drugiego wiersza pierwszej macierzy mnożymy przez elementy pierwszej kolumny drugiej macierzy i sumę wpisujemy w lewym dolnym rogu macierzy iloczynowej;

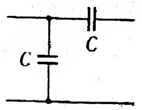
IV. Elementy drugiego wiersza pierwszej macierzy mnożymy przez elementy drugiej kolumny drugiej macierzy i sumę wpisujemy w prawym dolnym rogu macierzy iloczynowej.

Niezbyt ściśle, lecz krótko można powiedzieć, że *macierze mnoży się, mnożąc wiersze przez kolumny.*

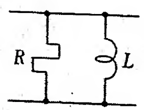
Przykłady.

1. 

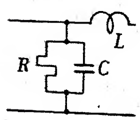
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{Cs} \\ Cs & 1 \end{pmatrix};$$

2. 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{Cs} \\ Cs & 2 \end{pmatrix};$$

3. 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Ls} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Ls}+\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix};$$

4. 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & Ls \\ \frac{1}{Z} & \frac{Ls}{Z}+1 \end{pmatrix};$$

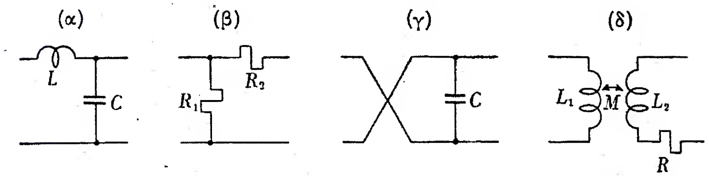
operator Z oznacza tu impedancję dla układu oporu i kondensatora. Na podstawie pierwszego ze wzorów (38.5) mamy

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+Cs.$$

Wobec tego macierz całego czwórnika podanego w przykładzie 4 można napisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & Ls \\ \frac{1}{R}+Cs, & LCs^2+\frac{L}{R}s+1 \end{pmatrix}.$$

Ćwiczenie. Obliczyć metodą mnożenia macierzy następujące czwórniki:

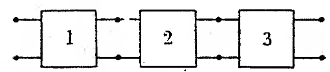


Rys. 52.

§ 44. Połączenia trzech czwórników

Przypuśćmy, że łączymy z sobą trzy czwórniki (rysunek 53) o macierzach

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$



Rys. 53. Połączenia trzech czwórników.

Czwórniki 1 i 2 razem wzięte tworzą czwórnik, którego macierz jest iloczynem

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix};$$

czwórnik ten jest połączony z czwórnikiem 3, wobec czego macierz całego zespołu będzie iloczynem

$$\left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \tag{44.1}$$

Ale można rozumować inaczej. Czwórniki 2 i 3 tworzą łącznie czwórnik o macierzy

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Czwórnik ten jest poprzedzony czwórnikiem 1, wobec czego macierz całego zespołu można napisać w postaci

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\right]. \tag{44.2}$$

Iloczyny (44.1) i (44.2) przedstawiają macierz jednego i tego samego czwórnika, złożonego z elementów 1, 2 i 3, muszą więc być sobie równe:

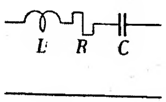
$$\left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\right].$$

Równość ta wyraża łączność iloczynu macierzy. Można ją też udowodnić bezpośrednio przez efektywne wykonanie mnożeń według prawidła podanego w poprzednim paragrafie. Dzięki łączności iloczyn trzech macierzy można zapisywać bez wskazywania kolejności wykonywanych działań (bez nawiasów graniastych):

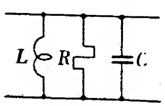
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Zauważmy jeszcze, że iloczyn macierzowy nie spełnia prawa przemienności, to znaczy, że kolejności macierzy występujących w iloczynie nie można na ogół zmieniać bez wpływu na wynik działania. Wynika to choćby z przykładów 1 i 2, rozpatrzonych w poprzednim paragrafie.

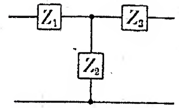
Przykłady.

1. 

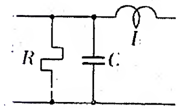
$$\begin{pmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ls+R+\frac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Ls} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Ls}+\frac{1}{R}+Cs & 1 \end{pmatrix};$$

3. 

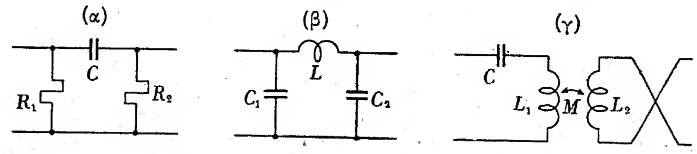
$$\begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & Z_1+Z_3+\frac{Z_1Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_1} & 1+\frac{Z_3}{Z_2} \end{pmatrix};$$

4. 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ls \\ \frac{1}{R}+Cs & LCs^2+\frac{L}{R}s+1 \end{pmatrix}.$$

Czwórnik podany w przykładzie 4 jest w istocie identyczny z czwórnikiem z przykładu 4 z poprzedniego paragrafu. Wynik otrzymaliśmy w obydwu przypadkach ten sam, mimo że droga rachunku była inna.

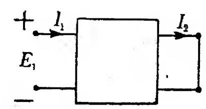
Ćwiczenie. Obliczyć metodą mnożenia macierzy następujące czwórniki:



Rys. 54.

§ 45. Czwórniki ze zwartymi przewodami końcowymi

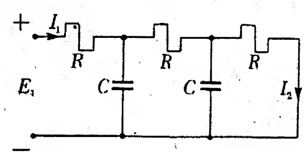
Gdy przewody końcowe czwórnika są zwarte (rysunek 55), to mamy $E_2=0$ i z równań (42.1) znajdujemy



Rys. 55.

$$I_1=\frac{A_{22}}{A_{12}}E_1, \qquad I_2=\frac{1}{A_{12}}E_1.$$

Przykład. Znaleźć prądy I_1 i I_2 w układzie podanym na rysunku 56 (przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe).



Rys. 56.

Obliczamy macierz czwórnika przez mnożenie macierzy:

$$\begin{pmatrix}1 & R\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\Cs & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\Cs & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R\\0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$(45.1)\qquad =\begin{pmatrix}R^2C^2s^2+3RCs+1 & R(R^2C^2s^2+4RCs+3)\\ Cs(RCs+2) & R^2C^2s^2+3RCs+1\end{pmatrix};$$

stąd

$$(45.2)\qquad I_1=\frac{R^2C^2s^2+3RCs+1}{R(R^2C^2s^2+4RCs+3)}E_1,$$

$$(45.3)\qquad I_2=\frac{1}{R(R^2C^2s^2+4RCs+3)}E_1.$$

W szczególności, gdy włączona siła elektromotoryczna jest stała: $E_1=\frac{E_0}{s}$, to mamy

$$I_1=\frac{E_0}{R}\cdot\frac{R^2C^2s^2+3RCs+1}{s(R^2C^2s^2+4RCs+3)}=E_0\left(\frac{1}{3Rs}+\frac{C}{2(RCs+1)}+\frac{C}{6(RCs+3)}\right),$$

$$I_2=\frac{E_0}{R}\cdot\frac{1}{s(R^2C^2s^2+4RCs+3)}=E_0\left(\frac{1}{3Rs}-\frac{C}{2(RCs+1)}+\frac{C}{6(RCs+3)}\right),$$

czyli

$$I_1(t)=\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\exp\frac{-t}{RC}+\frac{1}{6}\exp\frac{-3t}{RC}\right),$$

$$I_2(t)=\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\exp\frac{-t}{RC}+\frac{1}{6}\exp\frac{-3t}{RC}\right).$$

Gdy siła elektromotoryczna jest sinusoidalna $E_0e^{i\varphi}$ (zob. § 39), to prąd ustalony na wejściu do czwórnika można wyznaczyć ze wzoru (45.2), zastępując E_1 przez $E_0e^{i\varphi}$, I_1 przez $I_0e^{i\psi}$ i wreszcie s przez $-\omega i$:

$$I_0e^{i\psi}=\frac{-R^2C^2\omega^2-3RC\omega i+1}{R(-R^2C^2\omega^2-4RC\omega i+3)}\cdot E_0e^{i\varphi}.$$

Stąd

$$I_0=\frac{E_0}{R}\sqrt{\frac{R^4C^4\omega^4+7R^2C^2\omega^2+1}{R^4C^4\omega^4+10R^2C^2\omega^2+9}},$$

$$\psi=\varphi+\operatorname{arc\,tg}\frac{3RC\omega}{R^2C^2\omega^2-1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2-3}.$$

Podobnie można ze wzoru (45.3) wyznaczyć amplitudę i fazę prądu na wyjściu z czwórnika:

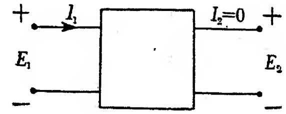
$$\frac{E_0}{R\sqrt{R^4C^4\omega^4+10R^2C^2\omega^2+9}},\qquad \varphi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2-3}.$$

Uzasadnienie tej metody rachunku jest takie same jak w paragrafach 33 i 39.

§ 46. Czwórniki z wolnymi przewodami końcowymi

Gdy przewody końcowe czwórnika są wolne (rysunek 57), to mamy $I=0$ i z równań (37.1) znajdujemy

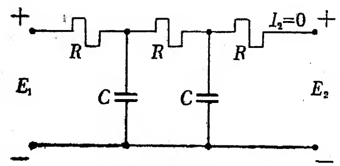
$$I_1=\frac{A_{21}}{A_{11}}E_1,\qquad E_2=\frac{1}{A_{11}}E_1.$$



Rys. 57.

Przykład. Znaleźć prąd wejściowy i napięcie końcowe w czwórniku podanym na rysunku 58. Jest to ten sam czwórnik, którym zajmowaliśmy się w poprzednim paragrafie, z tą jedyną różnicą, że końce jego są wolne. Wobec tego możemy skorzystać od razu z kształtu macierzy (45.1), na podstawie której mamy

$$(46.1)\qquad I_1=\frac{Cs(RCs+2)}{R^2C^2s^2+3RCs+1}E_1,\qquad E_2=\frac{1}{R^2C^2s^2+3RCs+1}E_1.$$



Rys. 58.

Gdy załączona siła elektromotoryczna jest stała: $E_1=\frac{E_0}{s}$, to mamy

$$I_1=E_0\frac{C(RCs+2)}{R^2C^2s^2+3RCs+1}=E_0C\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{RCs+\alpha}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{RCs+\beta}\right),$$

$$E_2=E_0\frac{1}{s(R^2C^2s^2+3RCs+1)}=$$

$$=E_0\left(\frac{1}{s}+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\,\frac{RC}{RCs+\alpha}-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\,\frac{RC}{RCs+\beta}\right),$$

gdzie $\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Stąd

$$I_1(t)=\frac{E_0}{R}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\exp\frac{-\alpha t}{RC}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\exp\frac{-\beta t}{RC}\right),$$

$$E_2(t)=E_0\left(1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\exp\frac{-\alpha t}{RC}-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\exp\frac{-\beta t}{RC}\right).$$

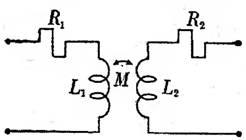
Gdy siła elektromotoryczna jest sinusoidalna: $E_0e^{i\varphi}$, to można zastosować rachunek podobny jak w poprzednim paragrafie. W ten sposób na przykład ze wzoru (46.1) znajdujemy dla napięcia końcowego amplitudę i fazę

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^4C^4\omega^4+7R^2C^2\omega^2+1}},\qquad \varphi-\mathrm{arctg}\frac{3RC\omega}{R^2C^2\omega^2-1}.$$

Ćwiczenie. Znaleźć prąd wejściowy I_1 i końcowy I_2 dla czwórników podanych na rysunku 54 w przypadkach, gdy ich końce są wolne i gdy są zwarte.

§ 47. Transformatory

Transformator można sobie wyobrazić jako czwórnik, przedstawiony na rysunku 59. W rzeczywistości opory R_1 i R_2 są związane z samoindukcją wewnątrz zwojów, jednak oddzielnie ich przedstawienie w schemacie jest wygodne dla celów rachunkowych. Istotnie, pozwala ono wyliczyć macierz czwórnika przez wymnożenie trzech macierzy czwórników prostych:



Rys. 59.

$$\begin{pmatrix}1 & R_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{L_1}{M} & \frac{(L_1L_2-M^2)s}{M}\\ \frac{1}{Ms} & \frac{L_2}{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Po wykonaniu rachunków mamy

(47.1) $$\begin{pmatrix}\frac{L_1s+R_1}{Ms} & \frac{(L_1s+R_1)(L_2s+R_2)-M^2s^2}{Ms}\\ \frac{1}{Ms} & \frac{L_2s+R_2}{Ms}\end{pmatrix}.$$

Jest to macierz transformatora w najogólniejszym przypadku.

W *transformatorach mocy*, gdzie idzie o najmniejszą stratę energii, staramy się zmniejszyć opory do minimum. Ponadto przez włączenie rdzenia z miękkiego żelaza staramy się możliwie zwiększyć współczynnik indukcji wzajemnej M; w ten sposób różnica $L_1L_2-M^2$ staje się bliska zeru. W takich transformatorach można przyjąć z przybliżeniem

$$R_1=R_2=0 \quad \text{i} \quad L_1L_2-M^2=0.$$

Wówczas macierz (47.1) upraszcza się do postaci

(47.2) $$\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{L_1L_2}\,s} & \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\end{pmatrix}.$$

Jest to macierz transformatora idealnego.

Przypuśćmy, że na wejściu do transformatora mamy napięcie sinusoidalne $E_{10}e^{i\varphi}$. Wtedy na przewodach wyjściowych będziemy mieli napięcie $E_{20}e^{i\varphi}$, takie że

(47.3) $$E_{10}e^{i\varphi}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}E_{20}e^{i\varphi},$$

co wynika z pierwszego wiersza macierzy (41.2). Szukając związków dla prądów ustalonych, oznaczmy przez $I_{10}e^{i\psi_1}$ prąd ustalony na wejściu, a przez $I_{20}e^{i\psi_2}$ prąd ustalony na wyjściu z transformatora. Stosując metodę podaną w paragrafach 33 i 39, będziemy mieli wobec kształtu drugiego wiersza macierzy (47.2)

$$I_{10}e^{i\psi_1}=\frac{1}{-\sqrt{L_1L_2}\,\omega i}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}E_{10}e^{i\varphi}+\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_{20}e^{i\psi_2},$$

a stąd

(47.4) $$I_{10}e^{i\psi_1}-\frac{i}{L_1\omega}E_{10}e^{i\varphi}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_{20}e^{i\psi_2}.$$

W transformatorach mocy iloczyn $L_1\omega$ jest na ogół duży i w równaniu (47.4) wyraz

(47.5) $$\frac{i}{L_1\omega}E_{10}e^{i\varphi}$$

można pominąć. Jest więc w przybliżeniu

(47.6) $$I_{10}e^{i\psi_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_{20}e^{i\psi_2}.$$

Równaniom (41.3) i (47.6) odpowiada macierz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} \end{pmatrix}; \tag{47.7}$$

jest to *uproszczona* macierz transformatora. Macierz ta jest wygodna w rachunkach i wystarczająco dokładna dla transformatorów mocy. O ile jednak pulsacja ω jest bardzo niska i samoindukcja L_1 na tyle mała, że wyraz (47.5) wchodzi w rachubę, należy posługiwać się macierzą (47.2). Również w przypadku, gdy napięcie nie jest sinusoidalne, lub gdy chcemy uwzględnić prądy przejściowe powstające przy włączaniu transformatora, należy zawsze posługiwać się macierzą (47.2) lub (47.1).

Oznaczmy przez m liczbę zwojów w pierwotnej cewce transformatora, przez n zaś liczbę zwojów w cewce wtórnej. Jeżeli L oznacza samoindukcję pojedynczego zwoju, to będziemy mieli

$$L_1 = m^2 L \quad \text{i} \quad L_2 = n^2 L.$$

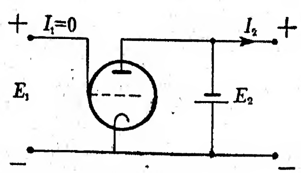
Podstawiając te wartości do macierzy (47.7), mamy

$$\begin{pmatrix} \dfrac{m}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{m} \end{pmatrix}.$$

§ 48. Lampa katodowa jako czwórnik

Lampę katodową (triodę) można uważać za czwórnik, o ile między napięciem siatkowym E_1, napięciem anodowym E_2 i prądem anodowym I_2 (rysunek 60) zachodzi związek

$$E_1 = \frac{1}{\mu}(E_2 + RI_2), \tag{48.1}$$



Rys. 60.

gdzie μ jest współczynnikiem wzmocnienia, a R oporem wewnętrznym lampy. Ponieważ natężenie I_1 w obwodzie siatkowym można przyjąć jako równe zeru, mamy

$$I_2 = 0 \cdot E_2 + 0 \cdot I_2. \tag{48.2}$$

Wobec równości (48.1) i (48.2) mamy dla lampy, traktowanej jako czwórnik, macierz następującą:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu} & \dfrac{R}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{48.3}$$

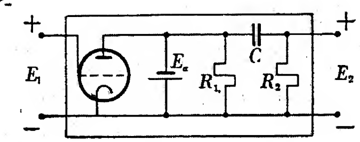
Należy pamiętać, że traktowanie lampy jako czwórnika jest dozwolone tylko wtedy, gdy pracuje ona w odpowiednich warunkach, to znaczy gdy wysokość napięcia siatkowego i anodowego waha się w granicach dopuszczalnych. O ile warunki te nie są spełnione, to beztroskie operowanie macierzą (48.3) może doprowadzić do zupełnie fałszywych wyników.

Korzystając ze znajomości macierzy (48.3), można łatwo znaleźć macierz dla czwórnika przedstawionego na rysunku 61, mianowicie jest ona równa iloczynowi macierzy

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu} & \dfrac{R}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{Cs} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Po wykonaniu mnożenia, otrzymujemy macierz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{s+\lambda}{\alpha s} & \dfrac{s+\nu}{\beta s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



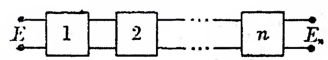
Rys. 61.

gdzie

$$\alpha = \frac{\mu R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}, \qquad \lambda = \frac{R + R_1}{C(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)},$$

$$\beta = \frac{\mu}{R}, \qquad \nu = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Jeżeli połączymy ze sobą n czwórników rozważanego typu, to otrzymamy czwórnik (rysunek 62), którego macierz jest równa



Rys. 62.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{s+\lambda}{\alpha s} & \dfrac{s+\nu}{\beta s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n,$$

czyli po wykonaniu łatwego rachunku

$$\begin{pmatrix} \left(\dfrac{s+\lambda}{\alpha s}\right)^n & \left(\dfrac{s+\lambda}{\alpha s}\right)^{n-1} \dfrac{s+\nu}{\beta s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że jeżeli przez E oznaczymy napięcie wejściowe, przez E_n i I_n zaś napięcie i natężenie końcowe, to mamy związek

$$E = \left(\frac{s+\lambda}{\alpha s}\right)^n E_n + \left(\frac{s+\lambda}{\alpha s}\right)^{n-1} \frac{s+\nu}{\beta s} I_n. \tag{48.4}$$

Obliczmy w szczególności napięcię końcowe E_n, gdy napięcie początkowe jest stałe: $E = \dfrac{E_0}{s}$, a końce czwórnika są wolne. Wtedy jest $I_n = 0$ i z wzoru (48.2) mamy

$$E_n = E_0 \alpha^n \frac{s^{n-1}}{(s+\lambda)^n}.$$

Ponieważ

$$s^{n-1} = [(s+\lambda)-\lambda]^{n-1} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \binom{n-1}{\varkappa} \lambda^\varkappa (s+\lambda)^{n-\varkappa-1},$$

więc można napisać

$$E_n = E_0 \alpha^n \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \binom{n-1}{\varkappa} \frac{\lambda^\varkappa}{(s+\lambda)^{n+1}}$$

lub na podstawie wzoru (19.2)

$$E_n(t) = E_0 \alpha^n e^{-\lambda t} \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (-1)^\varkappa \binom{n-1}{\varkappa} \frac{(\lambda t)^\varkappa}{\varkappa!}.$$

Znaleziona funkcja jest w bliskim związku z tak zwanymi *wielomianami Laguerre'a*

$$L_n(t) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \frac{t^\varkappa}{\varkappa!}.$$

Korzystając z tego oznaczenia można napisać

$$E_n(t) = E_0 \alpha^n e^{-\lambda t} L_{n-1}(\lambda t).$$

Łatwo znaleźć dla wielomianów Laguerre'a pewne związki różniczkowe. Mamy mianowicie

$$\{e^{-t} L_n(t)\} = \frac{s^n}{(s+1)^{n+1}} = s^n \left\{\frac{t^n}{n!} e^{-t}\right\} = \left\{\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!} e^{-t}\right)\right\},$$

ponieważ funkcja $\dfrac{t^n}{n!} e^{-t}$ i jej pochodne aż do rzędu $n-1$ włącznie są równe zeru dla $t=0$. Stąd

$$L_n(t) = e^t \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!} e^{-t}\right).$$

Podajemy jeszcze tabelkę wielomianów Laguerre'a dla początkowych wartości n:

$$L_0(t) = 1, \qquad L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3,$$

$$L_1(t) = 1 - t, \qquad L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{24} t^4,$$

$$L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2} t^2, \qquad L_5(t) = 1 - 5t + 5t^2 - \frac{5}{3} t^3 + \frac{5}{24} t^4 - \frac{1}{120} t^5.$$

ROZDZIAŁ VI

Ogólne rozwiązania równań różniczkowych i zagadnienia brzegowe

§ 49. Rozwiązanie ogólne

Dotąd rozwiązywaliśmy równania różniczkowe, mając dane warunki początkowe w punkcie $t=0$; do tych przypadków jest rachunek operatorów szczególnie dobrze dostosowany. Można jednak używać go z powodzeniem także w innych zagadnieniach, na przykład do znajdywania rozwiązania ogólnego, do rozwiązywania zadań brzegowych itp.

Zajmiemy się najpierw zagadnieniem *rozwiązania ogólnego*. W paragrafie 27 widzieliśmy, że rozwiązanie równania

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = f$$

można napisać w postaci

$$x = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{a_n s^n + \dots + a_n} + \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_0} \cdot f, \tag{49.1}$$

gdzie stałe $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ zależą od warunków początkowych w punkcie $t=0$. Gdy te warunki nie są z góry zadane, to $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ są stałymi dowolnymi i wzór (49.1) przedstawia rozwiązanie ogólne równania różniczkowego. Przejście do zwyczajnej, nie operatorowej postaci dokonuje się najwygodniej przez rozkład na ułamki proste. Zauważmy jednak, że w przypadku szukania rozwiązania ogólnego nie ma potrzeby obliczania współczynników $A, B, C, \dots$ przy ułamkach prostych

$$\frac{A}{(s-\lambda)^j}, \qquad \frac{B+Cs}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k},$$

które powstają przy rozkładzie wyrażenia

$$\frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0}{a_n s^n + \dots + a_0};$$

wystarczy po prostu te współczynniki przyjąć za stałe dowolne zamiast $\beta_{n-1}, \dots, \beta_0$. W ten sposób rachunek można znacznie skrócić.

Przykład. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = f.$$

Rozwiązanie. Ponieważ warunki początkowe są dowolne, więc równanie napisane w symbolice operatorowej będzie miało postać

$$s^4 x - 2s^3 x + 2s^2 x - 2sx + x = W + f,$$

gdzie $W = \beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$ jest dowolnym wielomianem trzeciego stopnia. Stąd mamy

$$x = \frac{W}{(s-1)^2(s^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} \cdot f.$$

Pierwszy z otrzymanych ułamków rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C+Ds}{s^2+1}$$

przyjmując A, B, C i D za stałe dowolne i nie troszcząc się o ich związek z wielomianem W. Natomiast przy rozkładzie drugiego z ułamków współczynniki są już jednoznacznie określone i znajdujemy je zwykłym sposobem:

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} = -\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{s}{2(s^2+1)}.$$

Ostatecznie więc jako rozwiązanie ogólne otrzymujemy funkcję

$$x(t) = Ae^t + Bte^t + C\sin t + D\cos t + \frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)(-e^\tau + \tau e^\tau + \cos\tau)\,d\tau.$$

Jeżeli znamy kształt funkcji f, to rachunek można nieraz tak zmodyfikować, że odpadnie wszelkie całkowanie. Przypuśćmy na przykład, że $f = \{\cos 2t\}$. Wtedy

$$x = \frac{W}{(s-1)^2(s^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} \cdot \frac{s}{s^2+4} =$$

$$= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C+Ds}{s^2+1} + \frac{E+Fs}{s^2+4}.$$

Stałe A, B, C i D są nadal dowolne, do wyznaczenia są tylko wartości E i F. Ponieważ wartości te zupełnie nie zależą od wielomianu W, można dla wyznaczenia ich przyjąć chwilowo, że $W=0$; wtedy otrzymujemy równość

$$[A(s-1)+B](s^2+1)(s^2+4)+[(C+Ds)(s^2+4)+ \\ +(E+Fs)(s^2+1)](s-1)^2=s.$$

Współczynniki E i F najprościej można wyliczyć, zastępując s przez liczbę $2i$; wówczas mamy

$$3(E+2Fi)(1-2i)^2=2i;$$

porównując części rzeczywiste i urojone, dochodzimy do równań

$$3(3E-8F)=0,$$
$$9(2E+3F)=2,$$

a stąd do wartości

$$E=\frac{8}{75}, \qquad F=\frac{1}{25}.$$

Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$x=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C+Ds}{s^2+1}+\frac{8+3s}{75(s^2+4)},$$

czyli

$$x(t)=Ae^t+Bte^t+C\sin t+D\cos t+\frac{4}{75}\sin 2t+\frac{1}{25}\cos 2t.$$

Widzimy, że pod względem rachunkowym wyznaczenie rozwiązania ogólnego jest nieco prostsze od wyznaczenia rozwiązania szczególnego przy zadanych warunkach początkowych; odpada bowiem obliczanie niektórych współczynników rozkładu na ułamki proste. Natomiast w przypadku układu równań uproszczenie to nie daje się zastosować, ponieważ wtedy należy uwzględnić pewne związki zachodzące między współczynnikami rozkładu. Na przykład dla układu równań

$$x'=x-2y,$$
$$y'=x-y+f$$

rozwiązanie zawsze będzie miało postać

$$x=\frac{A+Bs}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}\cdot f,$$
$$y=\frac{C+Ds}{s^2+1}+\frac{-1+s}{s^2+1}\cdot f,$$

ale spośród stałych A, B, C i D tylko dwie można ustalić dowolnie, pozostałe zaś zależą już od poprzednich.

Dla znalezienia rozwiązania ogólnego zawierającego tylko dwa parametry (niezależne) najwygodniej jest wprowadzić najpierw warunki początkowe

$$x(0)=\alpha, \qquad y(0)=\beta.$$

Rozwiązując teraz odpowiedni układ równań operatorowych

$$sx=x-2y+\alpha,$$
$$sy=x-y+\beta+f,$$

znajdziemy

$$x=\frac{(\alpha-2\beta)+\alpha s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}\cdot f,$$
$$y=\frac{(\alpha-\beta)+\beta s}{s^2+1}+\frac{-1+s}{s^2+1}\cdot f,$$

a stąd

$$x(t)=(\alpha-2\beta)\sin t+\alpha\cos t-2\int_0^t f(t-\tau)\sin\tau\,d\tau,$$

$$y(t)=(\alpha-\beta)\sin t+\beta\cos t+\int_0^t f(t-\tau)(-\sin\tau+\cos\tau)\,d\tau.$$

Jest to już oczywiście szukane rozwiązanie ogólne, gdyż występujące w nim stałe α i β są dowolne.

Taki sposób znajdywania rozwiązań ogólnych opłaca się tylko w przypadku układów równań, natomiast w przypadku jednego równania wygodniejszy jest sposób podany poprzednio, polegający na wprowadzeniu stałych dowolnych dopiero przy rozkładzie na ułamki proste.

Ćwiczenia. 1. Znaleźć rozwiązania ogólne dla następujących równań:

(α) $x'''-3\alpha x''+3\alpha^2x'-\alpha^3x=e^{\alpha t}$;

(β) $x'''-2x''-3x'+10x=0$;

(γ) $x^{(4)}-12x''+12x=16t^4e^{t}$;

(δ) $4x^{(4)}-12x'''+11x''-3x'=4\cos t$.

2. Znaleźć rozwiązania ogólne dla następujących układów równań:

(α) $x'+y=t^2+6t+1$,
$y'-x=-3t^2+3t+1$;

(β) $4x'+9y'+2x+31y=e^t$,
$3x'+7y'+x+24y=3$;

(γ) $x'=-3x+18y-8z$,
$y'=4x-y+2z$,
$z'=6x-36y-10z$.

§ 50. Zagadnienia brzegowe

O *zagadnieniu brzegowym* mówimy wtenczas, gdy zamiast warunków początkowych zadane są wartości szukanych funkcyj i ewentualnie ich pochodnych na obydwu końcach pewnego ustalonego przedziału. Będziemy więc mieli do czynienia z zagadnieniem brzegowym, gdy na przykład dla funkcji spełniającej równanie

$$x^{(4)}-2x'''+2x''-2x'+x=\cos 2t \tag{50.1}$$

zażądamy, żeby

$$x(0)=\frac{1}{25},\qquad x(\pi)=\frac{1}{25},\qquad x'(0)=\frac{2}{15},\qquad x'(\pi)=\frac{2}{25}.$$

Szukaną funkcję znajdujemy z rozwiązania ogólnego

$$x(t)=Ae^t+Bte^t+C\sin t+D\cos t+\frac{4}{75}\sin 2t+\frac{1}{25}\cos 2t, \tag{50.2}$$

dobierając tak współczynniki A, B, C i D, by warunki były spełnione. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$x(0)=A+D+\frac{1}{25}=\frac{1}{25},$$

$$x(\pi)=Ae^{\pi}+B\pi e^{\pi}-D+\frac{1}{25}=\frac{1}{25},$$

$$x'(0)=A+B+C+\frac{8}{75}=\frac{2}{15},$$

$$x'(\pi)=Ae^{\pi}+B(\pi e^{\pi}+e^{\pi})-C+\frac{8}{75}=\frac{2}{25}$$

i znajdujemy

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=\frac{2}{75},\qquad D=0.$$

Podstawiając te wartości do (50.2), otrzymujemy żądane rozwiązanie

$$x(t)=\frac{2}{75}\sin t+\frac{4}{75}\sin 2t+\frac{1}{25}\cos 2t.$$

W podobny sposób można rozwiązywać zagadnienia ogólniejsze, na przykład wyznaczać rozwiązania, mając zadane wartości funkcyj lub ich pochodnych w więcej niż dwóch punktach. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć funkcję spełniającą równanie (50.1), taką że

$$x(0)=0,\qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad x(\pi)=\frac{2}{25},\qquad x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{2}{25};$$

wtedy wystarczy rozwiązać układ równań

$$x(0)=A+D+\frac{1}{25}=0,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\exp\frac{\pi}{2}+B\frac{\pi}{2}\exp\frac{\pi}{2}+C-\frac{1}{25}=0,$$

$$x(\pi)=A\exp\pi+B\pi\exp\pi-D+\frac{1}{25}=\frac{2}{25},$$

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=A\exp\frac{3\pi}{2}+B\frac{3\pi}{2}\exp\frac{3\pi}{2}-C-\frac{1}{25}=-\frac{2}{25}.$$

W ten sposób znajdujemy

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=\frac{1}{25},\qquad D=-\frac{1}{25}$$

i wobec tego

$$x(t)=\frac{1}{25}\sin t-\frac{1}{25}\cos t+\frac{4}{75}\sin 2t+\frac{1}{25}\cos 2t.$$

W pewnych przypadkach może się zdarzyć, że otrzymany dla $A, B, \ldots$ algebraiczny układ równań nie da się rozwiązać; wtedy również rozwiązanie równania różniczkowego nie istnieje przy zadanych warunkach. Ogólnie, dyskusja istnienia rozwiązania przy danych warunkach sprowadza się do dyskusji rozwiązalności układu równań algebraicznych względem stałych $A, B, \ldots$

Ćwiczenia. 1. Które z następujących zagadnień brzegowych jest rozwiązalne:

(α) $x''-x=0$, $x(0)=0$, $x(2\pi)=1$; (β) $x''+x=0$, $x(0)=0$, $x(2\pi)=1$?

2. Znaleźć funkcję spełniającą równanie

$$x^{(4)}+4x=0$$

i warunki

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\pi},\quad x(0)=0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad x(\pi)=0.$$

§ 51. Rozwiązywanie równań różniczkowych przy danych warunkach początkowych w punkcie $t_0 \neq 0$

Metodę omówioną w poprzednim paragrafie można oczywiście z powodzeniem stosować również w przypadku, gdy wartości funkcji i jej pochodnych są zadane tylko w jednym punkcie. Wtedy jednak jest wygodniej, zamiast wpierw szukać rozwiązania ogólnego, zastosować rachunek bezpośredni. Jeżeli punkt t_0, w którym warunki są zadane, jest różny od zera, to rozwiązujemy najpierw zadanie tak, jak gdyby warunki początkowe dane były w punkcie $t=0$, lecz musimy uwzględnić odpowiednie przesunięcie układu współrzędnych.

Przykład. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$x^{(4)}-2x'''+2x''-2x'+x=f(t) \tag{51.1}$$

spełniające w danym punkcie $t_0 \neq 0$ warunki początkowe

$$x(t_0)=x'(t_0)=x''(t_0)=x'''(t_0)=0.$$

Rozwiązanie. Szukamy najpierw rozwiązania równania

$$x^{(4)}-2x'''+2x''-2x'+x=f(t+t_0)$$

spełniającego te same warunki początkowe w punkcie $t=0$:

$$x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$$

Mamy wtedy równanie operatorowe

$$s^4x-2s^3x+2s^2x-2sx+x=\{f(t+t_0)\},$$

a stąd

$$x=\left(-\frac{1}{2(s-1)}+\frac{1}{2(s-1)^2}+\frac{s}{2(s^2+1)}\right)\{f(t+t_0)\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\int_0^t f(t+t_0-\tau)(-e^\tau+\tau e^\tau+\cos\tau)\,d\tau\right\}.$$

Aby teraz otrzymać żądane rozwiązanie równania (51.1), wystarczy zamiast t napisać wszędzie $t-t_0$; mamy więc ostatecznie

$$x(t)=\frac{1}{2}\int_0^{t-t_0} f(t-\tau)(-e^\tau+\tau e^\tau+\cos\tau)\,d\tau.$$

Ćwiczenie. Rozwiązać następujące równania różniczkowe z podanymi warunkami początkowymi:

(α) $x'''-4x'=e^{4t}\sin^2 t$, $x(1)=x'(1)=x''(1)=1$; (β) $x'=-5x-2y$, $y'=x-7y$, $x(2)=y(2)=2$.

ROZDZIAŁ VII

Funkcje nieciągłe

§ 52. Funkcje klasy $\mathcal{K}$

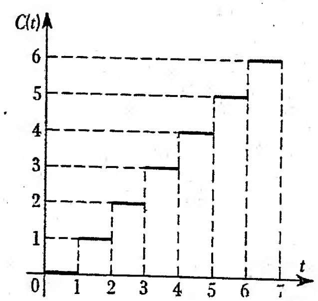
Obecnie chcemy wprowadzić do rachunku operatorowego pewne funkcje nieciągłe. Z punktu widzenia teoretycznego najnaturalniejsze byłoby wprowadzenie klasy funkcyj sumowalnych, wymaga ono jednak znajomości całki Lebesgue'a. Wobec tego ograniczymy się tu do węższej klasy funkcyj, która daje się traktować elementarnie, a jednocześnie wystarcza we większości zastosowań.

Ważnym przykładem funkcji nieciągłej jest funkcja $\{C(t)\}$, określona w ten sposób, że jej wartość w punkcie t jest równa największej liczbie całkowitej mniejszej lub równej t; na przykład:

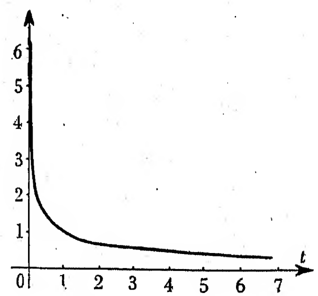
$$C(5{,}71)=5, \quad C(\tfrac{1}{2})=0, \quad C(\pi)=3, \quad C(10)=10 \quad \text{itp.}$$

Funkcję $\{C(t)\}$ nazywają często *całością* z t; w nauce logarytmów używana jest nazwa *cecha*. Wykres tej funkcji przedstawia rysunek 63.

Inny typ funkcji nieciągłej przedstawia funkcja $\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$ o wykresie przedstawionym na rysunku 64. Jest ona nieciągła w punkcie $t=0$ i nieograniczona w otoczeniu tego punktu.



Rys. 63.



Rys. 64.

Funkcje $\{C(t)\}$ i $\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$ reprezentują dwa typy funkcyj nieciągłych, ważnych w zastosowaniach. Aby określić klasę $\mathcal{K}$ obejmującą zarówno funkcje ciągłe jak i funkcje nieciągłe obydwu typów, przyjmujemy następującą definicję:

Funkcja $\{f(t)\}$ (o wartościach rzeczywistych lub zespolonych) rozważana w przedziale $0\leqslant t<\infty$, należy do klasy $\mathcal{K}$, jeżeli

(I) w każdym przedziale skończonym ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości;

(II) całka $\int\limits_0^t |f(\tau)|\,d\tau$ ma wartość skończoną dla każdego $t>0$.

Jeżeli $f=\{f(t)\}$ jest funkcją klasy $\mathcal{K}$, to w myśl definicji splotu mamy

$$lf=\{1\}\{f(t)\}=\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Całka po prawej stronie przedstawia zawsze funkcję ciągłą; oznaczając ją przez a, będziemy mieli $lf=a$, a stąd

$$f=\frac{a}{l}.$$

Zatem każdą funkcję klasy $\mathcal{K}$ możemy formalnie uważać za operator, jest bowiem ilorazem (w sensie działania odwrotnego do splotu) dwóch funkcyj klasy $\mathcal{C}$.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że następujące funkcje należą do klasy $\mathcal{K}$:

(α) $\left\{\frac{1}{t^{\lambda}}\right\}$, gdzie $\lambda<1$; (β) $\left\{\frac{1}{\sqrt{|\sin t|}}\right\}$; (γ) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\right\}$; (δ) $\left\{\frac{d}{dt}|t-1|\right\}$.

§ 53. Działania na funkcjach klasy $\mathcal{K}$

Z chwilą, gdy funkcje klasy $\mathcal{K}$ uważamy za operatory, mamy dla nich tym samym określone wszystkie te działania, które zdefiniowaliśmy dla operatorów.

Zastanówmy się najpierw, kiedy dwie funkcje f i g klasy $\mathcal{K}$ należy uważać za równe. Pisząc

$$a=\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} \quad \text{i} \quad b=\left\{\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau\right\}$$

czyli $a=f$ i $b=g$, mamy

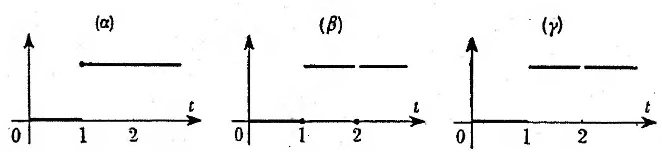
$$f=\frac{a}{l} \quad \text{i} \quad g=\frac{b}{l}.$$

Równość $\frac{a}{l}=\frac{b}{l}$ jest równoważna równości $a=b$, czyli równości

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad \text{dla wszystkich } t\geqslant 0.$$

Ta ostatnia równość będzie miała miejsce wtedy (i tylko wtedy), gdy funkcje f i g mają te same wartości w każdym punkcie, gdzie obie są ciągłe. W tym przypadku funkcje f i g należy uważać za równe sobie: $f=g$. Wartości funkcyj w punktach nieciągłości nie grają przy takiej definicji równości żadnej roli i funkcje mogą być w tych punktach nieokreślone.

Na przykład wszystkie funkcje, przedstawione na rysunkach 65 (α), (β) i (γ), będziemy uważali za równe, mimo że dwie



Rys. 65.

pierwsze mają różne wartości w punktach 1 i 2, a ostatnia jest w tych punktach nieokreślona.

Inne pojmowanie równości funkcyj nieciągłych mogłoby doprowadzić w rachunku operatorów do sprzeczności.

Przez sumę funkcyj f i g klasy $\mathcal{K}$ musimy konsekwentnie uważać sumę

$$f+g=\frac{a}{l}+\frac{b}{l}=\frac{1}{l}\left[\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}+\left\{\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\}\right]=$$

(53.1)

$$=\frac{1}{l}\left\{\int_0^t [f(\tau)+g(\tau)]\,d\tau\right\}.$$

Jeżeli

$$h(t)=f(t)+g(t)$$

dla wszystkich wartości t, w których f i g są określone, to

$$lh=\left\{\int_0^t [f(\tau)+g(\tau)]\,d\tau\right\}$$

i wobec (53.1) mamy $f+g=h$, czyli

$$\{f(t)\}+\{g(t)\}=\{f(t)+g(t)\}.$$

Równość ta oznacza, że funkcje klasy $\mathcal{K}$ dodajemy do siebie, dodając ich wartości (w punktach, gdzie są określone). W ten sposób definicja sumy $f+g$ jako sumy operatorów doprowadziła do naturalnej definicji sumy dwóch funkcyj.

Podobnie dowodzi się wzorów

$$\{f(t)\}-\{g(t)\}=\{f(t)-g(t)\},$$
$$\alpha\{f(t)\}=\{\alpha f(t)\} \qquad (\alpha \text{ — liczba}).$$

Pierwszy z nich oznacza, że funkcje klasy $\mathcal{K}$ odejmuje się, odejmując ich wartości (w punktach, gdzie są określone). Drugi oznacza, że funkcję klasy $\mathcal{K}$ mnoży się przez liczbę, mnożąc przez tę liczbę jej wartości (w punktach, gdzie jest określona).

Jest oczywiste, że suma i różnica funkcyj klasy $\mathcal{K}$ oraz iloczyn funkcji klasy $\mathcal{K}$ przez liczbę jest znowu funkcją klasy $\mathcal{K}$. Można udowodnić, że splot funkcyj klasy $\mathcal{K}$ jest także funkcją klasy $\mathcal{K}$[1]. Na tej podstawie łatwo można wyprowadzić (w taki sam sposób jak dla funkcyj ciągłych) łączność, przemienność i rozdzielność splotu w zakresie wszystkich funkcyj klasy $\mathcal{K}$. Stąd w szczególności wynika, że

$$l^2\cdot fg=lf\cdot lg=a\cdot b$$

i

$$fg=\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}.$$

Zatem iloczyn w sensie operatorowym dwóch funkcyj klasy $\mathcal{K}$ jest równy ich splotowi, zupełnie tak samo jak w przypadku funkcyj ciągłych.

Widzimy więc, że na funkcjach klasy $\mathcal{K}$ wykonuje się wszystkie działania tak jak na funkcjach ciągłych.

---

[1]) **Mikusiński i Ryll-Nardzewski** [37], str. 54, Corollaire 2 (α).

Uwaga. Punktem wyjścia pojęcia operatorów były funkcje klasy $\mathcal{C}$, z których tworzyliśmy ułamki $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathcal{K})$. Gdyby wyjść z klasy $\mathcal{K}$ i tworzyć ułamki $\frac{f}{g}$ $(f, g \in \mathcal{K})$, nie dałoby to nic nowego, gdyż każdy taki ułamek można by przedstawić w postaci $\frac{lf}{lg}$, gdzie licznik i mianownik są już funkcjami ciągłymi.

Ćwiczenie. Niech f_λ $(\lambda>0)$ oznacza funkcję, która ma wartość 0 w przedziale $0<t<\lambda$ i wartość 1 w przedziale $\lambda<t<\infty$; udowodnić, że

$$f_\lambda \cdot f_\mu = l\cdot f_{\lambda+\mu} \qquad (\lambda, \mu>0).$$

§ 54. Całka gamma Eulera

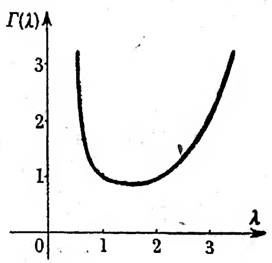
W paragrafie 8 (str. 8) wyprowadziliśmy wzór

$$l^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \tag{54.1}$$

dla naturalnych wartości n. W rachunku operatorów pożyteczne jest wprowadzenie także niecałkowitych potęg operatora l. Osiągnąć to możemy wprowadzając całkę gamma Eulera

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt,$$

która ma tę własność, że dla naturalnych wartości λ jest równa $(\lambda-1)!$. Całka ta, rozważana jako funkcja zmiennej λ, ma następujący wykres:



Rys. 66.

Dla naszych celów wystarczy omówić całkę $\Gamma(\lambda)$ w przypadku rzeczywistych, dodatnich wartości λ. Oto lista kilku podstawowych własności, z których będziemy korzystali w dalszym ciągu:

(i) $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$;

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla naturalnych wartości n;

(iii) $\dfrac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\,dt$;

(iv) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

A oto dowody tych własności:

Ad (i): Wykonując całkowanie przez części, mamy

$$\Gamma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\Gamma(\lambda+1).$$

Ad (ii): Dla $\lambda=1$ mamy $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$. Stąd na podstawie wzoru (i) mamy kolejno

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1!,$$
$$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2!,$$
$$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3!$$

i przez indukcję ogólnie $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Ad (iii): Iloczyn $\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)$ można przedstawić w postaci całki podwójnej

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu) = \iint_D x^{\lambda-1}e^{-x}\cdot y^{\mu-1}e^{-y}\,dx\,dy,$$

rozciągniętej na obszar D: $x, y>0$. Po wykonaniu podstawienia $x=tu$, $y=(1-t)u$ będziemy mieli

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu) = \iint_{D'} t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\cdot u^{\lambda+\mu-1}e^{-u}\,dt\,du,$$

gdzie obszar całkowania D' jest określony nierównościami: $0<t<1$, $u>0$. Stąd mamy

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\,dt\cdot\int_0^\infty u^{\lambda+\mu-1}e^{-u}\,du$$

i w konsekwencji równość (iii).

Ad (iv): Wobec wzorów (ii) i (iii) mamy

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=\pi,$$

skąd $\Gamma(\frac{1}{2})=\pm\sqrt{\pi}$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest dodatnia, należy wziąć znak plus.

Dzięki wzorowi (i) możemy znaleźć wartość $\Gamma(\lambda)$ dla każdego λ, o ile znamy jej wartości w jakimkolwiek przedziale o długości 1. Na końcu książki podajemy tabelkę przybliżonych wartości dla $1\leqslant\lambda<2$.

Własność (iv) pozwala na łatwe wyprowadzenie ważnego wzoru

$$\int_0^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{54.2}$$

Istotnie, mamy

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt$$

i po podstawieniu $t=\sigma^2$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

skąd wobec (iv) wynika wzór (54.2).

§ 55. Niecałkowite potęgi operatorów l i $s-\alpha$

Wzór (54.1) można uogólnić, pisząc

$$l^\lambda=\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} \tag{55.1}$$

dla wszystkich dodatnich wartości λ; ściśle mówiąc, równość (55.1) należy uważać za definicję operatora l^λ, która w przypadku, gdy λ jest naturalne, pokrywa się z dawniejszą definicją z paragrafu 8. Okazuje się, że przy tej definicji zachowana jest podstawowa własność potęgi

$$l^\lambda\cdot l^\mu=l^{\lambda+\mu}\qquad(\lambda,\mu>0). \tag{55.2}$$

Dowód przeprowadzimy od razu dla ogólniejszego operatora, zdefiniowanego wzorem

$$(s-\alpha)^{-\lambda}=\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}, \tag{55.3}$$

gdzie λ jest liczbą dodatnią, a α dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. W przypadku $\alpha=0$ wzór (55.3) sprowadza się do postaci (55.1), w przypadku zaś λ naturalnego pokrywa się z poprzednio już wyprowadzonym wzorem (24.2) (str. 32).

Zgodnie z definicją splotu mamy

$$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\left\{\int_0^t(t-\tau)^{\lambda-1}e^{\alpha(t-\tau)}\cdot\tau^{\mu-1}e^{\alpha\tau}d\tau\right\}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\left\{e^{\alpha t}\int_0^t(t-\tau)^{\lambda-1}\tau^{\mu-1}d\tau\right\}$$

a po podstawieniu $t-\tau=t\sigma$:

$$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_0^1\sigma^{\lambda-1}(1-\sigma)^{\mu-1}d\sigma\cdot\{t^{\lambda+\mu-1}e^{\alpha t}\}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu)}\{t^{\lambda+\mu-1}e^{\alpha t}\}.$$

Wobec (55.3) mamy ostatecznie wzór

$$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=(s-\alpha)^{-\lambda-\mu}\qquad(\lambda,\mu>0), \tag{55.4}$$

który w szczególnym przypadku $\alpha=0$ przechodzi we wzór (55.2).

Mając operator $(s-\alpha)^{-\lambda}$ zdefiniowany dla $\lambda>0$, możemy łatwo rozszerzyć jego definicję na wszystkie wartości rzeczywiste λ, pisząc

$$(s-\alpha)^0=1\quad\text{i}\quad(s-\alpha)^\lambda=\frac{1}{(s-\alpha)^{-\lambda}}\qquad(\lambda>0). \tag{55.5}$$

Nie trudno jest sprawdzić, że przy tej definicji wzór (55.4) jest ważny przy wszelkich λ i μ rzeczywistych.

Dla $\alpha=0$ wzory (55.5) przyjmują postać

$$l^0=1\quad\text{i}\quad l^{-\lambda}=\frac{1}{l^\lambda}\qquad(\lambda>0).$$

Dzięki wzorom (55.2) i (55.4) można na rozważanych operatorach przeprowadzać rachunki jak na zwykłych potęgach.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli $\lambda \geqslant 1$, to operator $(s-\alpha)^{-\lambda}$ przedstawia funkcję klasy $\mathcal{C}$, jeżeli zaś $0<\lambda<1$, to przedstawia funkcję nieciągłą w punkcie $t=0$, należącą do klasy $\mathcal{K}$; jeżeli wreszcie $\lambda \leqslant 0$, to operator $(s-\alpha)^{-\lambda}$ nie jest funkcją.

Z wzoru (55.3) mamy w szczególności

$$\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}\right\},$$

a stąd

$$\frac{1}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\alpha\tau}d\tau\right\} = \left\{\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{-\tau^2}d\tau\right\} \qquad (\alpha>0).$$

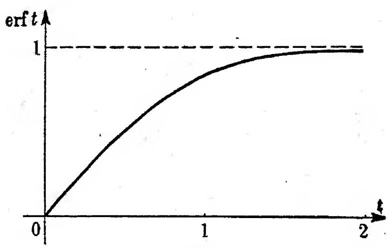
Wprowadzając oznaczenie

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau, \tag{55.6}$$

można napisać

$$\frac{1}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\alpha}\operatorname{erf}\sqrt{\alpha t}\right\}.$$

Z wzoru (55.6) widać, że funkcja erf jest funkcją ciągłą, która w przedziale $0 \leqslant t < \infty$ rośnie od 0 do 1, zgodnie z wzorem (54.2).



Rys. 67.

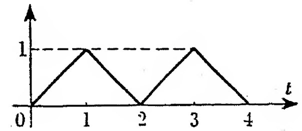
Funkcja $\operatorname{erf} t$ występuje w rachunku prawdopodobieństwa i bywa nazywana *funkcją błędu*; stąd oznaczenie „erf" z angielskiego *error function*. W niemieckich podręcznikach funkcja ta bywa oznaczana literą Φ.

Ćwiczenie. Udowodnić wzór:

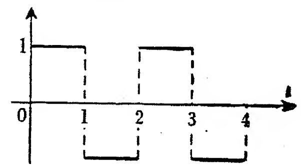
$$l\frac{1-\alpha^\lambda l^\lambda}{1-\alpha l} = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\left\{\int_t^\infty \tau^{\lambda-1}e^{-\alpha(\tau-t)}d\tau\right\} \qquad (\alpha,\lambda>0).$$

§ 56. Funkcje mające pochodną klasy $\mathcal{K}$

O funkcji a będziemy mówili, że ma pochodną klasy $\mathcal{K}$, jeżeli jest różniczkowalna w przedziale $0<t<\infty$ z wyjątkiem co najwyżej punktów, których liczba jest skończona w każdym przedziale skończonym. Na przykład funkcja, której wykres jest przedstawiony na rysunku 68 a, jest różniczkowalna we wszystkich punktach prócz $t=1,2,\ldots$; w każdym przedziale skończonym liczba tych punktów jest oczywiście skończona. Pochodna funkcji a jest przedstawiona na rysunku 68 b.



Rys. 68 a.



Rys. 68 b.

Mamy następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja a klasy $\mathcal{C}$ ma pochodną a' klasy $\mathcal{K}$, to

$$sa = a' + a(0), \tag{56.1}$$

gdzie $a(0)$ jest wartością funkcji a w punkcie $t=0$.

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia z paragrafu 21; dowód jest zupełnie taki sam jak w tamtym przypadku.

Należy zwrócić uwagę na to, że twierdzenie stałoby się fałszywe, gdyby o a założyć tylko, że jest funkcją klasy $\mathcal{K}$. Istotnie, przypuśćmy, że a jest funkcją klasy $\mathcal{K}$, określoną równościami

$$a = \begin{Bmatrix} 0 & \text{dla} & 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{dla} & 1 < t < \infty \end{Bmatrix}; \tag{56.2}$$

funkcja ta jest różniczkowalna we wszystkich punktach, z wyjątkiem $t=1$ i mamy

$$a' = \{0 \text{ dla } t \neq 1\}.$$

Pochodna a' jest nieokreślona w punkcie $t=1$, a poza tym wszędzie jest równa 0. W myśl definicji równości funkcyj klasy $\mathcal{K}$ mamy więc $a'=\{0\}=0$. Widać, że funkcja (56.2) nie może spełniać równości (56.1), gdyż wobec $a(0)=0$ wynikałoby stąd, że $sa=0$ i w konsekwencji $a=0$, co jest nieprawdą.

Zauważmy jeszcze, że każda funkcja f klasy $\mathcal{K}$ może być przedstawiona w postaci sa, gdzie a jest funkcją klasy $\mathcal{C}$:

$$f = sa;$$

istotnie, wystarczy napisać $a=lf$. Funkcja a spełniająca ten związek jest oczywiście jedyna.

Ćwiczenie. Podać wykresy funkcyj, przedstawionych przez wyrażenia:

(α) $s\{t-1+|t-1|\}$; (β) $s\{|t-1|+|t-2|-|t-3|\}$.

§ 57. Równania różniczkowe z nieciągłą prawą stroną

Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe

$$a_n x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_0 x=f,$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy $\mathcal{K}$, a więc niekoniecznie ciągłą. Będziemy mówili, że funkcja x jest rozwiązaniem tego równania, jeżeli

(I) ma $n-1$ pochodnych ciągłych;

(II) ma n-tą pochodną $x^{(n)}$ we wszystkich punktach, w których f jest ciągła;

(III) równanie jest spełnione we wszystkich punktach, w których f jest ciągła.

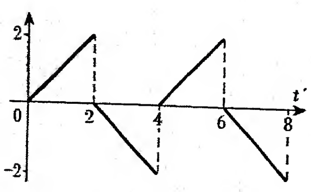
Jeżeli warunki początkowe lub brzegowe będziemy zadawać w punktach, w których funkcja f jest ciągła, to cała teoria stosuje się tak jak w przypadku równań z ciągłą prawą stroną. Trzeba zauważyć, że bez założenia (I) twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań byłoby fałszywe.

Przykład. Dane jest równanie różniczkowe

$$x'+x=f, \tag{57.1}$$

gdzie funkcja f jest określona wzorem

$$f(t)=(-1)^n(t-2n) \quad \text{dla} \quad 2n<t<2n+2 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$



Rys. 69.

Szukamy funkcji ciągłej, spełniającej równanie wszędzie poza punktami $2,4,\ldots$, w których f jest nieciągła; jako warunek początkowy przyjmujemy $x(0)=-1$.

Z równania (57.1) mamy

$$sx+x=-1+f,$$

a stąd

$$x=-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}f$$

i

$$x=\left\{-e^{-t}+\int_0^t e^{-t+\tau}f(\tau)\,d\tau\right\}=\left\{e^{-t}\left[-1+\int_0^t e^{\tau}f(\tau)\,d\tau\right]\right\}.$$

Dla wyliczenia otrzymanej całki zauważmy, że

$$\int_{4n}^{4n+2} e^{\tau}f(\tau)\,d\tau=\int_{4n}^{4n+2} e^{\tau}(\tau-4n)\,d\tau=e^{4n}+e^{4n+2},$$

$$\int_{4n+2}^{4n+4} e^{\tau}f(\tau)\,d\tau=-\int_{4n+2}^{4n+4} e^{\tau}(\tau-4n-2)\,d\tau=-e^{4n+2}-e^{4n+4};$$

jeżeli więc $4n\leqslant t\leqslant 4n+2$, to

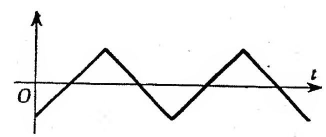
$$x(t)=e^{-t}\left[-e^{4n}+\int_{4n}^{t} e^{\tau}(\tau-4n)\,d\tau\right]=t-4n-1,$$

jeżeli zaś $4n+2\leqslant t\leqslant 4n+4$, to

$$x(t)=e^{-t}\left[e^{4n+2}+\int_{4n+2}^{t} e^{\tau}(\tau-4n-2)\,d\tau\right]=-t+4n+3.$$

Obydwa ostatnie wzory można ująć w jeden

$$x(t)=(-1)^n(t-2n-1) \quad \text{dla} \quad 2n\leqslant t\leqslant 2n+2 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$



Rys. 70.

Równania różniczkowe z nieciągłą prawą stroną mają znaczenie na przykład dla zastosowań w teorii prądów elektrycznych, dopuszczają bowiem do rachunków zupełnie dowolne napięcia E, bez ograniczania się wyłącznie do napięć ciągłych.